Math. U.
144 K. 7

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<3660428656001 7

<3660428656001 7

Bayer. Staatsbibliothek

# Lehrbuch

der

# höhern Analysis,

vom

**Professor Dr. Martin Ohm,**

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

---

## Fünfter Theil,

## Schluß der Differenzial- und Integral-Rechnung.

---

**Mit einer Figurentafel,**

auch mit einer

**Sammlung von Beispielen zur Lehre vom Größten und Kleinsten.**

---

**Berlin, 1833.**

In Jonas' Verlagsbuchhandlung,

Schloßfreiheit Nr. 9.

# Versuch

eines

vollkommen consequenten

# Systems der Mathematik,

vom

**Professor Dr. Martin Ohm,**

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

---

## Siebenter Theil,

## Schluß der Differenzial- und Integral-Rechnung.

---

Mit einer Figurentafel,

auch mit einer

**Sammlung von Beispielen zur Lehre vom Größten und Kleinsten.**

---

**Berlin, 1833.**

In Jonas' Verlagsbuchhandlung,

Schloßfreiheit Nr. 9.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

# Vorrede.

Indem der Verfasser dem Publiko den Schluß der Differenzial- und Integralrechnung übergiebt, bemerkt er nochmals ausdrücklich, daß er alles was die Reihen betrifft, zu denen man in den Anwendungen fast allemal seine Zuflucht nehmen muß, in die nächstfolgenden Theile dieses Systems zusammenfassen wird. Diese noch folgenden Theile können jedoch nicht ganz so regelmäßig erscheinen, wie die früheren bisher erschienen sind; doch wird sich der Vfr. beeilen, solche sobald mitzutheilen, als es seine vielen, dringenden anderweitigen Arbeiten und die Wichtigkeit der zu behandelnden Gegenstände nur immer erlauben werden. — In Bezug auf das Integriren der Parzialgleichungen der 2ten und höhern Ordnungen in endlicher Form wird der erfahrene Leser freilich vieles noch zu wünschen finden, jedoch vielleicht auch gestehen, daß der Verfasser nach dem Vollständigeren gestrebt hat. — Das Kapitel über die allgemeinere Lehre vom Größten und Klein-

sten sucht in möglichst gedrängter Kürze die wichtigsten derjenigen Methoden hervorzuheben, welche von Vielen als zu dem Variationskalkul gehörig angesehen werden. Hinsichtlich des größern Details mußte der Verfasser auf seine im Jahre **1825** erschienene „Lehre vom Größten und Kleinsten" verweisen. Die hier im 2ten Anhange gegebene Beispielsammlung ist so eingerichtet, daß sie auch als zu jenem Werke gehörig angesehen werden kann. Dadurch hat aber der Verfasser, zum Theil wenigstens, ein Versprechen erfüllt, welches in der Vorrede zu jenem Werke gegeben worden ist.

In den V. Th. dieses Werkes haben sich mehr Druckfehler eingeschlichen, als billigerweise gestattet werden können. Deshalb ist hier noch ein Verzeichniß derselben beigegeben.

**Berlin im März 1833.**

**Dr. M. Ohm.**

# Inhalts-Verzeichniß des siebenten Theils.

## Neunzehntes Kapitel.


Integration der Parzial-Differenzial-Gleichungen der ersten Ordnung in endlicher Form. (§§. 428—454.) . . . . . Pag. 3.

Erste Abtheilung. Allgemeine Integration der lineären Parzialgleichungen der ersten Ordnung. (§§. 428—434.) . . . . . Pag. 3.

A. Wenn eine einzige lineäre Parzialgleichung gegeben ist.

§. 428. Erklärung der lineären Parzialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 429. Integration der Gleichung

$$X = X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''}.$$

§. 430. Integration der Gleichung

$$X = X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''} + X_3 \cdot \partial x_{x'''}.$$

§. 431. Integration der lineären Gleichungen zwischen $n+1$ Veränderlichen.

§. 432. Betrachtung einzelner Fälle.

B. Erweiterung dieser Methode, um mehrere lineäre Gleichungen, welche beziehlich einerlei Koeffizienten haben, gleichzeitig zu integriren. (§§. 433. 434.)

Zweite Abtheilung. Allgemeine Integration der nicht lineären Parzialgleichungen der ersten Ordnung. (§§. 435—448.) . . . Pag. 29.

A. Die Methode des Lagrange für Parzialgleichungen zwischen 3 Veränderlichen, nebst der Erweiterung dieser Methode für Parzialgleichungen zwischen 4 und mehr Veränderlichen.

§§. 435. 436. Entwicklung dieser Methode für Gleichungen zwischen 3 Veränderlichen.

§§. 437. 438. Umformung dieser Integrations-Methode für Gleichungen zwischen 3 Veränderlichen.

§. 439. Erweiterung dieser letztern Methode auf Parzialgleichungen zwischen n+1 Veränderlichen.

B. Methode des Pfaff, beliebige Parzialgleichungen der ersten Ordnung allgemein und in endlicher Form zu integriren. (§§. 440—442.)

C. Methode des Charpit. Dieselbe weiter durchgeführt.

§. 443. Die Methode des Charpit, nebst deren Vortheile in Einzelfällen.

§. 444. Wie man vom vollständigen zum allgemeinen Integrale gelangt, und was, wenn letzteres nicht in endlicher algebraischer Form existirt, als Stellvertreter desselben angesehen werden kann.

§§. 445—447. Aufsuchung der Form, welche die gegebenen Parzialgleichungen haben müssen, wenn bei Anwendung dieser Methode des Charpit die im (§. 443.) erwähnten Erleichterungen sollen eintreten können.

§. 448. Versuche, diese Methode auf Gleichungen zwischen 4 und mehr Veränderlichen auszudehnen.

Dritte Abtheilung. Besondere Methoden und Betrachtungen über die Integration der Parzialgleichungen der ersten Ordnung in endlicher Form. (§§. 449—454.) . . . . Pag. 75.

§§. 449—451. Integration der lineären Parzialgleichungen mittelst spezieller Betrachtungen.

§. 452. Gleichzeitige Integration zweier lineären Gleichungen.

§. 453. Zerlegung der zu integrirenden Gleichung

$$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

in zwei integrirbare, durch Einführung eines neuen Veränderlichen. — Eine von Lubbe angegebene Methode ist darin enthalten.

§. 454. Einige Verfahrungs-Arten, welche Euler zuerst versucht hat.

## Zwanzigstes Kapitel.

Integrations-Versuche gegebener Parzialgleichungen der zweiten und höhern Ordnungen in endlicher Form. (§§. 455—473.) . . Pag. 102.

A. Integration solcher Parzialgleichungen der 2ten und höhern Ordnungen, welche sich direkt auf totale Differenzialgleichungen zurückführen lassen. (§. 455. §. 456.)

B. Integration der lineären Parzialgleichungen der 2ten und höhern Ordnung.

§. 457. Integration der Gleichung

$$A_0 \cdot \partial^n z_x + A_1 \cdot \partial^{n-1,1} z_{x,y} + A_2 \cdot \partial^{n-2,2} z_{x,y} + \cdots A_n \cdot \partial^n z_y = 0,$$

wenn die Koeffizienten alle konstant sind.

§. 458. Integration der Gleichung

$$R \cdot \partial^2 z_x + S \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + T \cdot \partial^2 z_y = V,$$

wo R, S, T und V Funktionen von x, y, z, $\partial z_x$ und $\partial z_y$ sind.

§. 459. Integration der Gleichung

$$R \cdot \partial^2 z_x + S \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + S \cdot \partial^2 z_y + P \cdot \partial z_x + Q \cdot \partial z_y + N \cdot z = M,$$

wo R, S, T, P, Q, N, M bloß x und y allein enthalten.

§. 460. Integration der Gleichung der 3ten Ordnung

$$A \cdot \partial^3 z_x + B \cdot \partial^{2,1} z_{x,y} + C \cdot \partial^{1,2} z_{x,y} + D \cdot \partial^3 z_y = V,$$

wo A, B, C, D, V Funktionen von x, y, z und $\partial z_x$, $\partial z_y$, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$ sind.

§. 461. Ausdehnung der Methode des (§. 458.) auf Gleichungen zwischen mehr als 3 Veränderlichen.

C. Integration einiger nicht lineären Parzialgleichungen. (§§. 462. 463.)

D. Versuche, die Parzialgleichungen der 2ten und höhern Ordnung durch Umformung zu integriren. (§§. 464—469.)

E. Noch einiges zur Theorie der Parzialgleichungen der 2ten Ordnung. (§. 470.)

F. Weitere Ausführung der Methode des (§. 322. d. V. Th. d. S.), um Parzialgleichungen zu integriren, welche ein erstes Integral haben, vorzüglich in Bezug auf lineäre Gleichungen der 2ten Ordnung. (§. 471. bis §. 473.)

## Ein und zwanzigstes Kapitel.

Die allgemeinste Lehre vom Größten und Kleinsten. (§§. 474—477.) . . . . . Pag. 184.

§. 474. V kann gegen $V_x$ weder ein Maximum noch ein Minimum seyn, wenn nicht $\delta V = 0$ oder $\delta V = \frac{1}{0}$ ist.

§§. 475. 476. Wie, praktisch, das Maximum vom Minimo zu unterscheiden ist.

§. 477. Aufzählung der wichtigsten einzelnen Fälle, in denen $\delta V = 0$ in mehrere Gleichungen zerfällt. Wie diese Zerfällung jedesmal bewerkstelligt wird.

Erster Anhang. Uebungs-Aufgaben, welche zu totalen Differenzialgleichungen führen. . . . . Pag. 1.

Zweiter Anhang. Beispielsammlung zur Lehre vom Größten und Kleinsten. . . . . Pag. 47

# Differenzial- und Integral-Rechnung.

# Höhere Zahlenlehre.

## Neunzehntes Kapitel.

### Integration der Parzialdifferenzialgleichungen der ersten Ordnung in endlicher Form.

### Erste Abtheilung.

### Allgemeine Integration der lineären Parzialgleichungen der ersten Ordnung.

#### A. Wenn eine einzige lineäre Parzialgleichung gegeben ist.

#### §. 428. Erklärung.

Eine Parzialdifferenzialgleichung irgend einer nten Ordnung zwischen einem abhängigen Veränderlichen z und zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen x, y ꝛc. heißt lineär, wenn sie in Bezug auf die Ableitungen der höchsten nten Ordnung lineär ist, wie auch die Ableitungen der niedrigern Ordnungen, so wie der abhängige Veränderliche selbst (in den Koeffizienten und außerdem noch) vorkommen mögen.

Also ist z. B.

$$N \cdot \partial^2 z_x + P \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + Q \cdot \partial^2 z_y = R$$

eine lineäre Gleichung der 2ten Ordnung zwischen den 3 Veränderli-

chen x, y und z, was für Funktionen von x, y, z, $\partial z_x$ und $\partial z_y$ unter N, P, Q, R auch immer verstanden werden mögen.

Eben so ist

$$M \cdot \partial z_x + N \cdot \partial z_y = P$$

eine lineäre Gleichung der 1sten Ordnung, wenn auch M, N, P ganz beliebige Funktionen von x, y und z vorstellen.

Eine lineäre Gleichung der 3ten Ordnung erblickt man in der Form

$$A \cdot \partial^3 z_x + B \cdot \partial^{2,1} z_{x,y} + C \cdot \partial^{1,2} z_{x,y} + D \cdot \partial^3 z_y + E = 0,$$

wenn A, B, C, D, E beliebige Funktionen von

$$x,\ y,\ z,\ \partial z_x,\ \partial z_y,\ \partial^2 z_x,\ \partial^{1,1} z_{x,y} \text{ und } \partial^2 z_y \quad \text{sind.}$$

Auf gleiche Weise heißt die Gleichung

$$A \cdot \partial^2 z_x + B \cdot \partial^2 z_y + C \cdot \partial^2 z_u + D \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + E \cdot \partial^{1,1} z_{x,u} + F \cdot \partial^{1,1} z_{y,u} + G = 0$$

eine lineäre Gleichung der 2ten Ordnung, zwischen den 4 Veränderlichen x, y, u und z, wenn nur A, B, C, D, E, F und G beliebige Funktionen sind von x, y, u, z, $\partial z_x$, $\partial z_y$ und $\partial z_u$. *)

Namentlich versteht man also unter lineären Partialdifferenzialgleichungen der ersten Ordnung solche, welche die Form

$$(\odot) \cdots \quad X = X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''} + X_3 \cdot \partial x_{x'''} + \cdots + X_n \cdot \partial x_{(x)^n}$$

haben, unter der Voraussetzung, daß x als Funktion der n unabhängigen Veränderlichen $x', x'', x''', \cdots x^{(n)}$ angesehen ist, und daß $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ gegebene Funktionen aller n+1 Veränderlichen $x, x', x'', \cdots x^{(n)}$ vorstellen.

## §. 429. Zusatz.

Ist nun gegeben die lineäre Parzialgleichung der 1ten Ordnung

1) $$X = X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''}$$

zwischen den beiden unabhängigen Veränderlichen $x'$, $x''$ und dem

---

*) Eine totale Differenzialgleichung zwischen zwei oder mehr Veränderlichen (welche allemal nur einen unabhängigen Veränderlichen hat) heißt nur dann lineär, wenn sie in Bezug auf alle Ableitungen (der höchsten und der niedrigern Ordnung zugleich) und noch überdieß in Bezug auf die abhängigen Veränderlichen selbst die lineäre Form hat.

abhängigen Veränderlichen x, wo X, $X_1$ und $X_2$ gegebene Funktionen der 3 Veränderlichen x, x′ und x″ vorstellen, und wird ihr allgemeines Ur-Integral

2) $$\Pi_{x,x',x''} = 0$$

gesucht, so muß, wenn man aus

3) $$\partial\Pi_{(x')} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial\Pi_{x'} + \partial\Pi_x \cdot \partial x_{x'} = 0$$

4) $$\partial\Pi_{(x'')} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial\Pi_{x''} + \partial\Pi_x \cdot \partial x_{x''} = 0$$

die Ableitungen $\partial x_{x'}$ und $\partial x_{x''}$ findet, und die Werthe dafür in die (1.) substituirt, die entstehende Gleichung

5) $$0 = \partial\Pi_x \cdot X + \partial\Pi_{x'} \cdot X_1 + \partial\Pi_{x''} \cdot X_2$$

identisch seyn, nach x allein, nach x′ allein und nach x″ allein.

Die gesuchte Funktion $\Pi$ der 3 Veränderlichen x, x′ und x″ hat also die Eigenschaft, daß sie die Gleichung (5.) identisch macht, während x, x′ und x″ von einander ganz unabhängig gedacht werden. Und umgekehrt: jede Funktion $\Pi$, welche die (5.) auf diese Weise identisch macht, liefert eine Gleichung

2) $$\Pi = 0,$$

welche ein der Parzialgleichung (1.) genügender Werth seyn muß, welche also eben so gut ein besondres, als auch das allgemeine Integral der gegebenen Parzialgleichung (1.) seyn kann.

Denkt man sich aber, wie auch die gesuchte Funktion $\Pi$ seyn mag, unter x, x′ und x″ Funktionen eines neuen Veränderlichen t, so hat man allemal

6) $$\partial\Pi_{(t)} = \partial\Pi_x \cdot \partial x + \partial\Pi_{x'} \cdot \partial x' + \partial\Pi_{x''} \cdot \partial x'',$$

wo sich die bloßen $\partial$ auf t beziehen, und welche Gleichung zur Rechten genau dieselben Koeffizienten enthält, als die Gleichung (5.).

Eliminirt man daher aus den beiden Gleichungen (5. und 6.) einen dieser unbekannten Koeffizienten z. B. $\partial\Pi_x$, so erhält man

7) $$\partial\Pi_{(t)} \cdot X = \partial\Pi_{x'} \cdot (X \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x) + \partial\Pi_{x''} \cdot (X \cdot \partial x'' - X_2 \cdot \partial x),$$

welche Gleichung nun statt der (5.) steht, und welcher man daher genügen muß. — Dieser Gleichung (7.) wird aber offenbar am allgemeinsten genügt, wenn man x, x′, x″ als solche Funk-

tionen von t sich denkt, daß

8) $X \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x = 0$; und 9) $X \cdot \partial x'' - X_2 \cdot \partial x = 0$

wird, und wenn man zuletzt statt $\Pi$ jede beliebige Funktion von x, x', x'' setzt, welche jedoch die Eigenschaft hat, daß für diese, aus den Gleichungen (8. und 9.) zu findenden Funktionen x, x', x'' von t, auch noch

10) $$\partial \Pi_{(t)} = 0$$

wird; denn diese 3 Gleichungen (8.—10.) machen die (7.) identisch, ohne von der Funktion $\Pi$ mehr als eine einzige Eigenschaft zu verlangen.

Integrirt man aber die beiden totalen Gleichungen (8. und 9.), welche sich auch so schreiben lassen, nämlich

11) $$\frac{\partial x}{X} = \frac{\partial x'}{X_1} = \frac{\partial x''}{X_2},$$

nach (§. 281. d. V. Th. d. S.), so findet man x' und x'' als Funktionen von x mit 2 willkührlichen Konstanten $c_1$ und $c_2$, und x bleibt dabei eine ganz willkührliche Funktion von t. — Löst man diese beiden Integralgleichungen nach den Konstanten $c_1$ und $c_2$ algebraisch auf, so erhält man

12) $$c_1 = f_1 \quad \text{und} \quad c_2 = f_2,$$

während $f_1$, $f_2$ bestimmte Funktionen von x, x' und x'' seyn werden, welche aber die konstanten Werthe $c_1$ und $c_2$ annehmen, so oft für x, x', x'' solche Funktionen von t gedacht sind, welche den Gleichungen (8. und 9.) d. h. den Gleichungen (11.) genügen. — Also genügt man vollends der Gleichung (10.), wenn man statt $\Pi$ eine ganz willkührliche Funktion von $f_1$ und $f_2$ setzt, weil dann diese Funktion $\Pi$ nothwendig konstant wird, so oft man statt x, x', x'' ihre aus den Gleichungen (11.) gezogenen Werthe setzt, so daß für diese die Gleichung (10.) dann ebenfalls erfüllt ist.

Das praktische Geschäft des Integrirens der gegebenen lineären Parzialgleichung

1) $$X = X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''}$$

besteht also darin, daß man die totalen Gleichungen (11.) nämlich die Gleichungen

$$11) \qquad \frac{\partial x}{X} = \frac{\partial x'}{X_1} = \frac{\partial x''}{X_2},$$

wo die bloßen $\partial$ nach irgend einem neuen Veränderlichen $t$ genommen sind, nach (§. 281. oder Anmerkg. 1. zu §. 282. d. V. Th. d. S.) integrirt (wodurch $x'$ und $x''$ Funktionen von $x$ werden); die beiden Integralgleichungen in Bezug auf die beiden eingehenden willkührlichen Konstanten $c_1$ und $c_2$ algebraisch auflößt, so daß sie die Form annehmen

$$12) \qquad c_1 = f_1 \quad \text{und} \quad c_2 = f_2;$$

dann aber

$$13) \qquad \Pi_{f_1, f_2} = 0 \quad \text{oder} \quad f_1 = \varphi_{f_2} \quad \text{oder} \quad f_2 = \psi_{f_1}$$

als das allgemeine Integral der gegebenen Parzialgleichung ansieht, wo $\Pi$ eine ganz willkührliche Funktion von $f_1$ und $f_2$, wo also auch $\varphi$ eine ganz willkührliche Funktion von $f_2$, oder wo $\psi$ eine ganz willkührliche Funktion von $f_1$ vorstellt.

Anmerkg. 1. Genügt man der Gleichung (7.) nicht in der Allgemeinheit, wie dies eben geschehen ist, so erhält man auf demselben Wege offenbar nur besondere Integrale. Aber in jedem Falle hat man einen, der gegebenen Parzialgleichung (1.) genügenden Werth, sobald der Gleichung (7.) genügt ist.

Anmerkg. 2. Daß man in dem allgemeinen Integral

$$\Pi_{f_1, f_2} = 0 \quad \text{oder} \quad f_1 = \psi_{f_2}$$

statt $f_1$ und $f_2$ wiederum jede beliebige und bestimmte Funktion von $f_1$ und $f_2$ setzen könne, und daß dadurch das Integral weder mehr noch weniger allgemein werde, fällt dabei von selbst in die Augen, sobald man die Schlüsse des (§. 429.) gehörig beachtet. Auch schließen sich alle diese Resultate genau an das an, was wir im (XIIIten Kap. d. V. Th. d. S.) von den Parzialgleichungen der ersten Ordnung bereits gelehrt haben.

## §. 430.

Um von der lineären Parzialgleichung

1) $$X = X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''} + X_3 \cdot \partial x_{x'''},$$

in welcher $X, X_1, X_2, X_3$ gegebene Funktionen der 4 Veränderlichen $x, x', x'', x'''$ sind, das allgemeine Ur-Integral zu finden, wird man die 3 totalen Gleichungen *)

2) $$\frac{\partial x}{X} = \frac{\partial x'}{X_1} = \frac{\partial x''}{X_2} = \frac{\partial x'''}{X_3},$$

in denen die Ableitungen nach einem neuen Veränderlichen t genommen sind, nach (§. 282. d. V. Th. d. S.) integriren, so daß $x', x'', x'''$ als Funktionen von x erscheinen; die 3 Integralgleichungen nach den 3 eingehenden willkührlichen Konstanten $c_1, c_2, c_3$ algebraisch auflösen, so daß sie in der Form erscheinen

3) $$c_1 = f_1; \quad c_2 = f_2; \quad c_3 = f_3,$$

wo $f_1, f_2, f_3$ bestimmte Funktionen von $x, x', x'', x'''$ seyn werden; zuletzt aber

4) $\Pi_{f_1, f_2, f_3} = 0$ oder $f_1 = \varphi_{f_2, f_3}$ oder $f_2 = \psi_{f_1, f_3}$ oder $f_3 = \chi_{f_1, f_2}$

zum gesuchten allgemeinen Integral nehmen, indem man $\Pi, \varphi, \psi$ oder $\chi$ als willkührliche Funktionen sich denkt.

Die Schlüsse des (§. 429.), hier wiederholt, führen unmittelbar zu der hier gegebenen praktischen Regel.

## §. 431.

Und soll die lineäre Parzialgleichung

1) $$X = X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''} + X_3 \cdot \partial x_{x'''} + \cdots + X_n \cdot \partial x_{x^{(n)}}$$

zwischen den $n+1$ Veränderlichen $x, x', x'', \cdots, x^{(n)}$ allgemein integrirt werden, so integrire man die n totalen Gleichungen **)

---

*) Das Schema (2.) enthält eigentlich 6 totale Differenzialgleichungen. Sind jedoch irgend drete derselben gegeben, so folgern sogleich die 3 übrigen von selbst.

**) Das Schema (2.) enthält eigentlich $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen.

2) $$\frac{\partial x}{X} = \frac{\partial x'}{X_1} = \frac{\partial x''}{X_2} = \cdots = \frac{\partial x^{(n)}}{X_n}$$

(nach §. 282. oder §. 282. Anmerkg. 1. d. V. Th. d. S.), indem man $x, x', x'', \cdots x^{(n)}$ als Funktionen von t (oder

$$x', x'', x''', \cdots x^{(n)}$$

als Funktionen von x) sich denkt; lößt die n Integralgleichungen, welche man erhält, nach den n eingehenden willkührlichen Konstanten $c_1, c_2, c_3, \cdots c_n$ algebraisch auf, so daß sie die Form annehmen

3) $$c_1 = f_1; \quad c_2 = f_2; \quad c_3 = f_3; \cdots c_n = f_n,$$

wo $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ bestimmte Funktionen von

$$x, x', x'' \cdots, x^{(n)}$$

seyn werden; und nimmt dann als das allgemeine Ur-Integral der gegebenen Parzialgleichung die folgende Gleichung, nämlich:

4) $$\Pi_{f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n} = 0,$$

so daß irgend einer der n Ausdrücke $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ eine ganz willkührliche Funktion der $n-1$ übrigen wird.

Beispiel 1. Ist gegeben die Parzialgleichung

$$\partial z_x + M \cdot \partial z_y = N,$$

wo M und N konstant gedacht sind, so hat man hier statt der obigen $x, x', x''$ jetzt beziehlich $z, x, y$ und statt $X, X_1, X_2$ jetzt beziehlich $N, 1, M$. Man muß daher die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial z}{N} = \frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{M}$$

d. h. die beiden Gleichungen

$$\partial z = N \cdot \partial x \quad \text{und} \quad \partial y = M \cdot \partial x$$

integriren; und man erhält

$$z = N \cdot x + c_1 \quad \text{und} \quad y = M \cdot x + c_2;$$

also

$$c_1 = z - N \cdot x \quad \text{und} \quad c_2 = y - M \cdot x,$$

und das gesuchte allgemeine Integral ist daher nun

---

Sind jedoch n derselben gegeben, so folgern augenblicklich alle übrigen von selbst.

$$z - N \cdot x = \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = y - M \cdot x \quad \text{ist,}$$

oder auch $$y - M \cdot x = \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = z - N \cdot x \quad \text{ist,}$$

während $\psi$ eine ganz willkührliche Funktion von $\omega$ bleibt. *)

**Beispiel 2.** Ist zu integriren die Parzialgleichung

$$\partial z_t + L \cdot \partial z_x + M \cdot \partial z_y = N,$$

wo L, M, N konstant sind, so hat man

statt der obigen $X, X_1, X_2, X_3, x, x', x'', x'''$,

jetzt beziehlich $N, l, L, M, z, t, x, y$.

Man hat daher die 3 Gleichungen

$$\frac{\partial z}{N} = \frac{\partial t}{l} = \frac{\partial x}{L} = \frac{\partial y}{M}$$

d. h. die 3 Gleichungen

$$\partial z = N \cdot \partial t; \quad \partial x = L \cdot \partial t; \quad \partial y = M \cdot \partial t$$

zu integriren; erhält

$$z = N \cdot t + c_1; \quad x = L \cdot t + c_2; \quad y = M \cdot t + c_3;$$

daraus

---

*) Da die Gleichungen

$$\frac{\partial z}{N} = \frac{\partial x}{l} = \frac{\partial y}{M}$$

eigentlich 3 Gleichungen bilden, von denen jedoch jedesmal die dritte aus den beiden andern abgeleitet werden kann; so kann man demselben allgemeinen Integral, wenn man immer zwei andre dieser 3 Gleichungen wählt, auch noch diese beiden andern Formen geben, nämlich

$$z - \frac{N}{M} \cdot y = \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = z - N \cdot x$$

oder

$$z - \frac{N}{M} \cdot y = \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = y - M \cdot x;$$

so wie man dieselben auch noch so schreiben kann:

$$z - N \cdot x = \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = z - \frac{N}{M} \cdot y$$

oder

$$y - M \cdot x = \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = z - \frac{N}{M} \cdot y.$$

Dies folgt aber auch aus der (Anmerkg. 2.) zu (§. 429.).

$$c_1 = z - N \cdot t; \qquad c_2 = x - L \cdot t; \qquad c_3 = y - M \cdot t,$$

und man hat nun das allgemeine Integral

$$z - N \cdot t = \psi_{\omega, \omega'}, \quad \text{wo} \quad \omega = x - L \cdot t, \quad \omega' = y - M \cdot t \quad \text{ist},$$

gefunden. *)

Beispiel 3. Soll die Parzialgleichung

$$z = x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y$$

allgemein integrirt werden, so hat man statt der obigen

$$X, X_1, X_2, x, x', x''$$

jetzt

$$z, x, y, z, x, y.$$

Die beiden zu integrirenden Gleichungen werden daher jetzt folgende:

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{y};$$

und diese geben, integrirt,

$$log(c_1 \cdot z) = log(c_2 \cdot x) = log(c_3 \cdot y)$$

d. h.

$$c_1 \cdot z = c_2 \cdot x = c_3 \cdot y,$$

wo eine der 3 Konstanten beliebig, etwa $= 1$ genommen werden kann. Also hat man, wenn $c_3 = 1$ genommen wird

$$c_1 = \frac{y}{z}, \qquad c_2 = \frac{y}{x},$$

und das allgemeine Integral ist daher

$$\frac{y}{z} = \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{y}{x}$$

während dasselbe Integral noch in sehr verschiedenen Formen hergestellt werden kann, nämlich

$$\frac{z}{y} = \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{y}{x}, \quad \text{oder} = \frac{x}{y},$$

ferner

$$\frac{z}{x} = \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{y}{x}, \quad \text{oder} = \frac{x}{y}, \quad \text{oder} = \frac{z}{y}, \quad \text{oder} = \frac{y}{z}$$

ist; u. s. w. f.

---

*) Daß man auch dieses allgemeine Integral in sehr verschiedenen andern Formen noch schreiben kann, fällt aus der Note zu dem (Beispiel 1.) besonders aber aus der (Anmerkg. 2. zu §. 429.) ohne weiteres in die Augen.

Beispiel 4. Soll die Gleichung

$$x \cdot \partial z_x + z \cdot \partial z_y + y = 0$$

integrirt worden, so sind die Gleichungen, von denen die Integration abhängt, folgende

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{z} = -\frac{\partial z}{y};$$

oder

$$z \cdot \partial x - x \cdot \partial y = 0; \quad x \cdot \partial z + y \cdot \partial x = 0 \quad \text{und} \quad y \cdot \partial y + z \cdot \partial z = 0.$$

Die letztere derselben, integrirt, giebt

$$y^2 + z^2 = a^2.$$

Setzt man diesen Werth von y in die 2te dieser Gleichungen, so erhält man

$$x \cdot \partial z + \partial x \cdot \sqrt{a^2 - z^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial z}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \frac{\partial x}{x} = 0,$$

deren Integral

$$\frac{1}{Sin}\left(\frac{z}{a}\right) + \log x = \log b \quad \text{oder} \quad x \cdot e^{\frac{1}{Sin}\left(\frac{z}{a}\right)} = b$$

ist. Findet man nun aus diesen beiden Integralen sowohl a als auch b, nämlich

$$a = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{und} \quad b = x \cdot e^{\frac{1}{Sin}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}};$$

so erhält man zum gesuchten allgemeinen Integral

$$x \cdot e^{\frac{1}{Sin}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}} = \varphi_{y^2+z^2},$$

wo $\varphi$ eine ganz willkührliche Funktion von $y^2 + z^2$ vorstellt.

Beispiel 5. Es sey die Parzialgleichung

$$(x - \alpha) \cdot (b' + \partial z_y) - (y - \beta) \cdot (a' + \partial z_x) + z \cdot (b' \cdot \partial z_x + a' \cdot \partial z_y) = 0$$

zu integriren. — Schreibt man sie so

$$(y - \beta - b' \cdot z) \cdot \partial z_x - (x - \alpha - a' \cdot z) \cdot \partial z_y = b' \cdot (x - \alpha) - a' \cdot (y - \beta),$$

so sieht man sogleich, daß die Integration von den Gleichungen

$$\frac{\partial x}{y - \beta - b' \cdot z} = -\frac{\partial y}{x - \alpha - a' \cdot z} = \frac{\partial z}{b' \cdot (x - \alpha) - a' \cdot (y - \beta)}$$

abhängt. Statt nun aus zweien dieser Gleichungen z und alle Ableitungen von z zu eliminiren, um die entstehende Gleichung zweier Veränderlichen integriren zu können, versucht man es lieber, diese Gleichungen nach (§. 399) gleichzeitig zu integriren. — Zu dem Ende kann

man zuvor neue Veränderliche $x'$ und $y'$ einführen mittelst der Gleichungen

$$x-\alpha = x' \quad \text{und} \quad y-\beta = y'.$$

Die vorstehenden 3 Gleichungen werden nun folgende

$$(y'-b'\cdot z)\cdot\partial y + (x'-a'\cdot z)\cdot\partial x' = 0,$$
$$(y'-b'\cdot z)\cdot\partial z - (b'\cdot x'-a'\cdot y')\cdot\partial x' = 0,$$
$$(x'-a'\cdot z)\cdot\partial z + (b'\cdot x'-a'\cdot y')\cdot\partial y' = 0.$$

Multiplizirt man nun die 2te dieser Gleichungen mit $a'$, die dritte mit $b'$, subtrahirt man nachgehends die Resultate von einander, und dividirt man durch $b'\cdot x'-a'\cdot y'$, so erhält man

$$\partial z + a'\cdot\partial x' + b'\cdot\partial y' = 0; \quad \text{also} \quad z + a'\cdot x' + b'\cdot y' = a.$$

Multiplizirt man ferner die zweite der gedachten Gleichungen mit $x'$, die dritte mit $y'$, subtrahirt man die Resultate von einander, und dividirt man zuletzt wieder durch $b'\cdot x'-a'\cdot y'$; so erhält man

$$z\cdot\partial z + x'\cdot\partial x' + y'\cdot\partial y' = 0; \quad \text{also} \quad z^2 + x'^2 + y'^2 = b.$$

Demnach ist das gesuchte allgemeine Integral

$$x'^2 + y'^2 + z^2 = \varphi\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = z + a'\cdot x' + b'\cdot y'$$

ist. Hier muß nun noch $x-\alpha$ statt $x'$ und $y-\beta$ statt $y'$ gesetzt werden, um die Gleichung zwischen $x$, $y$ und $z$ selbst zu haben.

Beispiel 6. Ist zu integriren die Parzialgleichung

$$(x+y+z)\cdot\partial z_u + (u+y+z)\cdot\partial z_x + (u+x+z)\cdot\partial z_y = u+x+y,$$

so hängt diese Integration ab von den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{x+y+z} = \frac{\partial x}{u+y+z} = \frac{\partial y}{u+x+z} = \frac{\partial z}{u+x+y}.$$

Versucht man es, auch diese Gleichungen wiederum gleichzeitig nach (§. 399.) zu integriren, so kann man hier den bekannten Satz benutzen, daß wenn man von beliebig viel gleichen Brüchen alle Zähler addirt, und auch alle Nenner addirt, der neue Bruch den gegebenen gleich ist; ja daß, wenn man zwei Zähler von einander subtrahirt und auch die zugehörigen Nenner von einander, der neue Bruch ebenfalls jedem der gegebenen Brüche gleich ist. — Vermöge dieses Satzes erhält man augenblicklich

$$-\frac{\partial x-\partial u}{x-u} = -\frac{\partial y-\partial u}{y-u} = -\frac{\partial z-\partial u}{z-u} = \frac{\partial x+\partial y+\partial z+\partial u}{3(x+y+z+u)}.$$

Nimmt man hiervon die Integrale, so findet man

$$-\log a(x-u) = -\log b(y-u) = -\log c(z-u) = \log\sqrt[3]{x+y+z+u},$$

oder

$$\frac{1}{a(x-u)} = \frac{1}{b(y-u)} = \frac{1}{c(z-u)} = \sqrt[3]{x+y+z+u},$$

woraus

$$\frac{1}{a} = (x-u)\cdot\sqrt[3]{x+y+z+u};$$

$$\frac{1}{b} = (y-u)\cdot\sqrt[3]{x+y+z+u};$$

und $\frac{1}{c} = (z-u)\cdot\sqrt[3]{x+y+z+u}$

hervorgeht, während die Konstanten selber durch $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{c}$ vorgestellt seyn können, d. h. während man a, b, c beziehlich statt $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{c}$ schreiben kann.

Das gesuchte allgemeine Integral ist daher

$$(x-u)\cdot\sqrt[3]{(x+y+z+u)} = \varphi_{\omega,\omega'}$$

wo $\omega = (y-u)\cdot\sqrt[3]{x+y+z+u}$ und $\omega' = (z-u)\cdot\sqrt[3]{x+y+z+u}$

ist. — Dasselbe allgemeine Integral kann aber auch so geschrieben werden

$(x-u)^3\cdot(x+y+z+u) = \varphi_{\omega,\omega'}$, wo $\left\{\begin{matrix}\omega = (y-u)^3\cdot(x+y+z+u)\\ \omega' = (z-u)^3\cdot(x+y+z+u)\end{matrix}\right\}$

ist.

**Beispiel 7.** Hat man zu integriren die Parzialgleichung

$$t\cdot\partial z_t + u\cdot\partial z_u + x\cdot\partial z_x + y\cdot\partial z_y = \alpha\cdot z;$$

so sind die Gleichungen, von denen die Integration abhängt, folgende, nämlich:

$$\frac{\partial t}{t} = \frac{\partial u}{u} = \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial z}{\alpha z};$$

und diese geben, integrirt, folgende

$$log(a\cdot t) = log(b\cdot u) = log(c\cdot x) = log(m\cdot y) = \frac{1}{\alpha}\cdot log\, z$$

oder $a^\alpha = \frac{z}{t^\alpha}$, $b^\alpha = \frac{z}{u^\alpha}$, $c^\alpha = \frac{z}{x^\alpha}$ und $m^\alpha = \frac{z}{y^\alpha}$.

Also ist das gesuchte allgemeine Integral, wenn man a, b, c, m statt $a^\alpha$, $b^\alpha$, $c^\alpha$, $m^\alpha$ substituirt:

$$\frac{z}{y^\alpha} = \varphi_{\frac{z}{t^\alpha}, \frac{z}{u^\alpha}, \frac{z}{x^\alpha}}.$$

wo $\varphi$ eine ganz willkührliche Funktion von $\frac{z}{t^\alpha}$, $\frac{z}{u^\alpha}$, $\frac{z}{x^\alpha}$ ist.

Da man die Gleichungen

$$\frac{\partial t}{t} = \frac{\partial u}{u} = \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial z}{\alpha z}$$

auch so integriren kann, daß man erhält

$$u = a \cdot t, \quad x = b \cdot t, \quad y = c \cdot t \quad \text{und} \quad z = m \cdot t^\alpha;$$

so kann man dasselbe allgemeine Integral auch so schreiben

$$\frac{z}{t^\alpha} = \varphi_{\frac{u}{t}, \frac{x}{t}, \frac{y}{t}} \quad \text{oder} \quad z = t^\alpha \cdot \varphi_{\frac{u}{t}, \frac{x}{t}, \frac{y}{t}}.$$

Anmerkg. Da die bei Ausführung der Methode der (§§. 287. und 293. des V. Th. d. S.) zur Bestimmung der verschiedenen $\omega$, erhaltenen Gleichungen, solche lineäre Parzialgleichungen sind, so dienen die vorstehenden (§. §.) zugleich zur Vervollständigung jener Methode, in so ferne man nun von jenen Gleichungen die allgemeinen Integrale finden, und aus diesen wiederum diejenigen besonderen Integrale heraussuchen kann, welche, wenn sie mehreren Gleichungen zu genügen haben, diese alle zugleich identisch machen.

Auch kann man von dort noch einige Beispiele hieher holen.

## §. 432.

Der größern Bequemlichkeit wegen geben wir hier noch eine Uebersicht der einfachern Fälle von einiger Allgemeinheit, welche durch die Methode des (§. 429.) sogleich integrirt werden können.

I. Hat man die Gleichung

$$X_x \cdot \partial z_x + Y_y \cdot \partial z_y = Z_z,$$

so hängt ihre Integration ab von den Gleichungen

$$\frac{\partial x}{X} = \frac{\partial y}{Y} = \frac{\partial z}{Z}.$$

Letztere geben aber integrirt, da X bloß x, Y bloß y und Z bloß z enthalten soll, sogleich

$$a = \int \frac{1}{Y} \cdot dy - \int \frac{1}{X} \cdot dx \quad \text{und} \quad b = \int \frac{1}{Z} \cdot dz - \int \frac{1}{X} \cdot dx;$$

während dann

$$b = \varphi_a$$

das allgemeine Integral ist; sobald man nur unter a und b die so eben für sie gefundenen Funktionen versteht.

II. Hat man die Parzialgleichung

$$P_{x,y} \cdot \partial z_x + Q_{x,y} \cdot \partial z_y = R_{x,y,z},$$

wo P und Q keine z enthalten sollen, so hängt ihre Integration von den Gleichungen

$$\frac{\partial x}{P} = \frac{\partial y}{Q} = \frac{\partial z}{R}$$

ab. Weil aber in $\frac{\partial x}{P} = \frac{\partial y}{Q}$ weder z noch $\partial z$ vorkommt, so kann solche als eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen integrirt werden. Hernach kann man mittelst der so zwischen x und y erhaltenen Urgleichung entweder y in x oder x in y ausdrücken, und entweder den ersten Werth statt y in die Gleichung

$$\frac{\partial x}{P} = \frac{\partial z}{R},$$

oder den andern statt x in die Gleichung

$$\frac{\partial y}{Q} = \frac{\partial z}{R}$$

substituiren, und die entstehende Gleichung zwischen zwei Veränderlichen zu integriren versuchen.

A. Ist etwa $R = R' \cdot Z$, wo $R'$ bloß x und y und Z bloß z enthalten soll, so geben die angeführten Gleichungen sogleich

$$\frac{\partial z}{Z} = \frac{R'}{P} \cdot \partial x, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial z}{Z} = \frac{R'}{Q} \cdot \partial y;$$

also $\int \frac{1}{Z} \cdot dz = \int \frac{R'}{P} \cdot dx$, oder $\int \frac{1}{Z} \cdot dz = \int \frac{R'}{Q} \cdot dy$,

wo jedoch in dem Integral $\int \frac{R'}{P} \cdot dx$, statt y sein Werth in

x vor der Integration nach x, in dem andern Integral $\int \frac{R'}{Q} \cdot dy$ statt x sein Werth in y ebenfalls vor der Integration gesetzt werden muß.

B. Ist dagegen $R = S_{x,y} \cdot z + T_{x,y}$; so wird die zweite zu integrirende Gleichung seyn

$$\frac{\partial x}{P} = \frac{\partial z}{S \cdot z + T}, \text{ oder } \frac{\partial y}{Q} = \frac{\partial z}{S \cdot z + T},$$

wo in der erstern kein y, in der andern aber kein x mehr vorkommt, in so ferne man die Gleichung

$$\frac{\partial x}{P} = \frac{\partial y}{Q}$$

vorher schon integrirt, also entweder y in x, oder x in y bereits ausgedrückt, und diese Werthe beziehlich statt y oder x substituirt haben soll.

III. Hat die gegebene Parzialgleichung die Form

$$P_{x,y,z} \cdot \partial z_x + Q_{x,y,z} \cdot \partial z_y = 0,$$

so sind die Gleichungen, von denen die Integration abhängt, jetzt diese

$$\frac{\partial x}{P} = \frac{\partial y}{Q} = \frac{\partial z}{0}$$

d. h., besser geschrieben,

$$Q \cdot \partial x - P \cdot \partial y = 0 \quad \text{und} \quad \partial z = 0.$$

Also erhält man

$$z = a,$$

und man hat dann bloß noch zu integriren die Gleichung

$$Q_{x,y,a} \cdot \partial x - P_{x,y,a} \cdot \partial y = 0,$$

oder die Gleichung

$$Q \cdot \partial x - P \cdot \partial y = 0,$$

indem man in ihr z konstant und $= a$ sich denkt.

IV. Sind endlich in der Gleichung

$$P \cdot \partial z_x + Q \cdot \partial z_y = R,$$

P, Q und R homogene Funktionen von x, y und z von der nten Dimension, so kann man neue Veränderliche t und u einführen, gegeben durch die Gleichungen

$$x = t \cdot z \quad \text{und} \quad y = u \cdot z.$$

Dann werden die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{P} = \frac{\partial y}{Q} = \frac{\partial z}{R},$$

von denen die Integration der Parzialgleichung abhängt, in so ferne

$$P = P' \cdot z^n; \qquad Q = Q' \cdot z^n; \qquad R = R' \cdot z^n$$

werden wird, wo $P'$, $Q'$, $R'$ kein z, sondern bloß t und u enthalten, folgende

$$\frac{\partial x}{P'} = \frac{\partial y}{Q'} = \frac{\partial z}{R'}$$

oder

$$P' \cdot \partial z - R' \cdot \partial x = 0 \qquad \text{und} \qquad Q' \cdot \partial z - R' \cdot \partial y = 0,$$

oder

$$P' \cdot \partial z - R' \cdot (t \cdot \partial z + z \cdot \partial t) = 0 \quad \text{und} \quad Q' \cdot \partial z - R' \cdot (u \cdot \partial z + z \cdot \partial u) = 0$$

d. h.

$$(P' - R' \cdot t) \cdot \frac{\partial z}{z} - R' \cdot \partial t = 0 \text{ und } (Q' - R' \cdot u) \cdot \frac{\partial z}{z} - R' \cdot \partial u = 0.$$

Eliminirt man aber hieraus den Ausdruck $\frac{\partial z}{z}$, so erhält man die Gleichung

$$(Q' - R' \cdot u) \cdot \partial t - (P' - R' \cdot t) \cdot \partial u = 0$$

bloß zwischen den beiden Veränderlichen t und u. Integrirt man letztere, und drückt man entweder t in u, oder u in t aus, so hat man nachher

$$z = e^{\int \frac{R'}{P' - R' \cdot t} \cdot dt}, \text{ oder } z = e^{\int \frac{R'}{Q' - R' \cdot u} \cdot du},$$

wo in der erstern Gleichung statt u sein Werth in t, in der 2ten dagegen statt t sein Werth in u ausgedrückt gesetzt werden muß,

um nachgehends im erstern Fall nach allem t, im andern Fall nach allem u das Integral nehmen zu können.

Ist z. B.

$$P = x \cdot z; \quad Q = y \cdot z; \quad R = x \cdot y;$$

so ist $P' = t$ ; $Q' = u$ ; $R' = t \cdot u$ ;

und die Gleichung zwischen t und u wird daher jetzt

$$(u - t \cdot u^2) \cdot \partial t - (t - t^2 \cdot u) \cdot \partial u = 0 \quad \text{oder} \quad (1 - u \cdot t) \cdot (u \cdot \partial t - t \cdot \partial u) = 0$$

d. h. $u \cdot \partial t - t \cdot \partial u = 0$ oder $\frac{\partial t}{t} - \frac{\partial u}{u} = 0$ oder $t = a \cdot u$.

Hernach giebt die 2te der noch z enthaltenden Gleichungen

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{t \cdot \partial u}{1 - u \cdot t} = \frac{au \cdot \partial u}{1 - au^2};$$

also $\log z = -\frac{1}{2} \log (1 - au^2) + \log b$ oder $z \cdot \sqrt{1 - au^2} = b$.

Das allgemeine Integral der Parzialgleichung

$$xz \cdot \partial z_x + yz \cdot \partial z_y = xy$$

wird daher nun folgendes seyn, nämlich

$$z \cdot \sqrt{1 - t \cdot u} = \varphi_{\left(\frac{t}{u}\right)} \quad \text{oder} \quad \sqrt{z^2 - xy} = \varphi_{\left(\frac{y}{x}\right)}$$

oder

$$z^2 - xy = \varphi_{\left(\frac{y}{x}\right)}. \; *)$$

---

*) Dividirt man aber diese, hier im Beispiel gegebene Parzialgleichung

$$xz \cdot \partial z_x + yz \cdot \partial z_y = xy$$

durch $x \cdot y \cdot z$, so erhält man

$$\frac{1}{y} \cdot \partial z_x + \frac{1}{x} \cdot \partial z_y = \frac{1}{z}.$$

Die Gleichungen, von denen nun die Integration abhängt, sind also

$$y \cdot \partial x = x \cdot \partial y = z \cdot \partial z$$

d. h. $\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial y}{y} = 0$ und $z \cdot \partial z = y \cdot \partial x$;

also $y = ax$ und $z^2 = ax^2 + b$;

d. h. $a = \frac{y}{x}$ und $b = z^2 - x \cdot y$;

während $b = \varphi_a$ das gesuchte allgemeine Integral ist.

Anmerkg. Wir bemerken noch schließlich, daß diese Methode der Integration der lineären Parzialgleichungen zuerst von Lagrange gegeben worden ist in den Memoiren der Berliner Akademie von 1779 (erschienen im Jahr 1781), jedoch etwas anders vorgetragen, als dies hier geschehen mußte. Im Jahre 1780 theilte Monge (nach Lacroix's Versicherung) in einer Vorlesung seinen Zuhörern dieselbe Methode mit, zu welcher er seinerseits auf einem, von dem des Lagrange verschiedenen Wege gekommen war. Monge machte seine hieher gehörigen Arbeiten im Jahre 1784 durch den Druck bekannt. — Näheres hierüber findet man noch in der dritten Abtheilung dieses Kapitels.

## B. Erweiterung dieser Methode, um mehrere lineäre Parzialgleichungen, welche beziehlich einerlei Koeffizienten haben, gleichzeitig zu integriren.

### §. 433.

Sind die 3 lineären Gleichungen

$$1) \quad X_4 \cdot \partial x_{x^{IV}} + X_3 \cdot \partial x_{x'''} = X,$$

$$2) \quad X_4 \cdot \partial x'_{x^{IV}} + X_3 \cdot \partial x'_{x'''} = X_1,$$

$$3) \quad X_4 \cdot \partial x''_{x^{IV}} + X_3 \cdot \partial x''_{x'''} = X_2$$

zu integriren, wo $x$, $x'$, $x''$ als Funktionen von $x'''$ und $x^{IV}$ gedacht sind, und wo $X_4$, $X_3$, $X_2$, $X_1$ und $X$ gegebene Funktionen der 5 Veränderlichen $x$, $x'$, $x''$, $x'''$, $x^{IV}$ vorstellen; so denke man sich, daß die 3 Gleichungen

$$4) \quad \Pi_{x,x',x'',x''',x^{IV}} = 0;$$

$$5) \ \Pi'_{x,x',x'',x''',x^{IV}} = 0 \ \text{und} \ 6) \ \Pi''_{x,x',x'',x''',x^{IV}} = 0$$

diese gesuchten Integrale seyen.

Differenziirt man aber diese 3 Gleichungen (4.—6.) nach allem $x'''$ und nach allem $x^{IV}$, so erhält man nachstehende 6 Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 7)\quad & \partial\Pi_{x'''}+\partial\Pi_{x''}\cdot\partial x''_{x'''}+\partial\Pi_{x'}\cdot\partial x'_{x'''}+\partial\Pi_{x}\cdot\partial x_{x'''}=0\\ 8)\quad & \partial\Pi_{x''}+\partial\Pi_{x''}\cdot\partial x''_{x''}+\partial\Pi_{x'}\cdot\partial x'_{x''}+\partial\Pi_{x}\cdot\partial x_{x''}=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 9)\quad & \partial\Pi'_{x'''}+\partial\Pi'_{x''}\cdot\partial x''_{x'''}+\partial\Pi'_{x'}\cdot\partial x'_{x'''}+\partial\Pi'_{x}\cdot\partial x_{x'''}=0\\ 10)\quad & \partial\Pi'_{x''}+\partial\Pi'_{x''}\cdot\partial x''_{x''}+\partial\Pi'_{x'}\cdot\partial x'_{x''}+\partial\Pi'_{x}\cdot\partial x_{x''}=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 11)\quad & \partial\Pi''_{x'''}+\partial\Pi''_{x''}\cdot\partial x''_{x'''}+\partial\Pi''_{x'}\cdot\partial x'_{x'''}+\partial\Pi''_{x}\cdot\partial x_{x'''}=0\\ 12)\quad & \partial\Pi''_{x''}+\partial\Pi''_{x''}\cdot\partial x''_{x''}+\partial\Pi''_{x'}\cdot\partial x'_{x''}+\partial\Pi''_{x}\cdot\partial x_{x''}=0 \end{aligned}\right\}.$$

Aus diesen letztern 6 Gleichungen muß man nun die 6 Ableitungen $\partial x_{x''''}$, $\partial x_{x''}$, $\partial x_{x'''}$, $\partial x'_{x''}$, $\partial x''_{x''''}$, $\partial x''_{x''}$ finden, diese Werthe in die 3 Gleichungen (1.—3.) substituiren, und dann jeder der 3 entstehenden Gleichungen am allgemeinsten zu genügen suchen. Oder mit andern Worten, man muß aus den letztern 6 Gleichungen und der (1.), dann aus den letztern 6 Gleichungen und der (2.), endlich aus den letztern 6 Gleichungen und der (3.) die gedachten 6 Ableitungen eliminiren, und die 3 entstehenden Eliminationsgleichungen am allgemeinsten identisch zu machen suchen.

Um nun diese Eliminationen durch die gewöhnliche Methode, die im (I. Th. d. S. §. 223.) unter dem Namen der französischen mitgetheilt worden ist, und die man auch häufig die Methode der Multiplikatoren nennt, zu bewerkstelligen, multiplizire man die Gleichungen (9. und 10.) mit $\lambda'$, die Gleichungen (11. und 12.) mit $\lambda''$, und addire sie beziehlich zu den Gleichungen (7. und 8.), und man erhält

$$13)\quad \left\{\begin{aligned} &\partial\Pi_{x'''}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x'''}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x'''}\\ &+(\partial\Pi_{x''}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x''}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x''})\cdot\partial x''_{x'''}\\ &+(\partial\Pi_{x'}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x'}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x'})\cdot\partial x'_{x'''}\\ &+(\partial\Pi_{x}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x})\cdot\partial x_{x'''} \end{aligned}\right\}=0$$

$$14)\quad \left\{\begin{aligned} &\partial\Pi_{x''}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x''}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x''}\\ &+(\partial\Pi_{x''}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x''}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x''})\cdot\partial x''_{x''}\\ &+(\partial\Pi_{x'}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x'}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x'})\cdot\partial x'_{x''}\\ &+(\partial\Pi_{x}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x})\cdot\partial x'_{x''} \end{aligned}\right\}=0$$

Denkt man sich nun $\lambda'$ und $\lambda''$ so bestimmt, daß in (13.) die Koeffizienten von $\partial x''_{x'''}$ und $\partial x'_{x'''}$ der Null gleich werden, so werden in (14.) auch die Koeffizienten von $\partial x''_{x^{IV}}$ und $\partial x'_{x^{IV}}$ der Null gleich; und die Gleichungen (13.) und (14.) geben dann unmittelbar die Ableitungen $\partial x_{x'''}$ und $\partial x_{x^{IV}}$; und die Werthe derselben in die (1.) subſtituirt geben die erste der 3 gesuchten Eliminationsgleichungen, nämlich die Gleichung

$$\text{I.} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\partial \Pi_{x^{IV}} + \lambda' \cdot \partial \Pi'_{x^{IV}} + \lambda'' \cdot \partial \Pi''_{x^{IV}}) \cdot X_4 \\ + (\partial \Pi_{x'''} + \lambda' \cdot \partial \Pi'_{x'''} + \lambda'' \cdot \partial \Pi''_{x'''}) \cdot X_3 \\ + (\partial \Pi_{x} + \lambda' \cdot \partial \Pi'_{x} + \lambda'' \cdot \partial \Pi''_{x}) \cdot X \end{array} \right\} = 0,$$

welche Gleichung analog ist mit der Gleichung (5.) des (§. 429.). Denkt man sich nun auf eine, dem Verfahren des (§. 429.) ganz analoge Weise $x$, $x'$, $x''$, $x'''$ und $x^{IV}$ als beliebige Funktionen von $t$, so geben diese Gleichungen (4—6.), wenn man sie unter diesem Gesichtspunkte nach allem $t$ differenziirt, die 3 Gleichungen:

$$15)\begin{cases} \partial\Pi_{x^{IV}}\cdot\partial x^{IV}+\partial\Pi_{x'''}\cdot\partial x'''+\partial\Pi_{x''}\cdot\partial x''+\partial\Pi_{x'}\cdot\partial x'+\partial\Pi_{x}\cdot\partial x=\partial\Pi_{(t)} \\ \partial\Pi'_{x^{IV}}\cdot\partial x^{IV}+\partial\Pi'_{x'''}\cdot\partial x'''+\partial\Pi'_{x''}\cdot\partial x''+\partial\Pi'_{x'}\cdot\partial x'+\partial\Pi'_{x}\cdot\partial x=\partial\Pi_{(t)} \\ \partial\Pi''_{x^{IV}}\cdot\partial x^{IV}+\partial\Pi''_{x'''}\cdot\partial x'''+\partial\Pi''_{x''}\cdot\partial x''+\partial\Pi''_{x'}\cdot\partial x'+\partial\Pi''_{x}\cdot\partial x=\partial\Pi_{(t)} \end{cases}.$$

Multiplizirt man wieder die zweite dieser Gleichungen mit $\lambda'$, die dritte mit $\lambda''$, und addirt man beide Produkte zur ersten, so erhält man

$$16)\begin{cases} (\partial\Pi_{x^{IV}}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x^{IV}}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x^{IV}})\cdot\partial x^{IV}+(\partial\Pi_{x'''}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x'''}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x'''})\cdot\partial x''' \\ +(\partial\Pi_{x''}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x''}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x''})\cdot\partial x''+(\partial\Pi_{x'}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x'}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x'})\cdot\partial x' \\ +(\partial\Pi_{x}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x})\cdot\partial x=\partial\Pi_{(t)}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{(t)}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{(t)}. \end{cases}$$

Und denkt man sich hier unter $\lambda'$ und $\lambda''$ genau dieselben Werthe, die man sich weiter oben darunter gedacht hat, so fallen aus dieser Gleichung (16.) noch die beiden mit $\partial x''$ und $\partial x'$ affizirten Glieder heraus. Sie ist dann analog mit der Gleichung (6.) des (§. 429.); denn sie unterscheidet sich links von der obigen (1.) nur dadurch, daß, wo dort $X_4$, $X_3$ und $X$ stehen, hier beziehlich $\partial x^{IV}$, $\partial x'''$ und $\partial x$ gefunden werden.

Ganz analog wie im (§. 429.) die Gleichung (7.) gebildet wurde, bildet man nun hier, indem man aus der Gleichung (1.) und aus der Gleichung (16.), wie sie jetzt zuletzt gedacht worden ist, den Ausdruck $\partial\Pi_x + \lambda' \cdot \partial\Pi'_x + \lambda'' \cdot \partial\Pi''_x$ eliminirt, diese neue Gleichung

$$(\mathbb{C}_1)\cdots \begin{cases} (\partial\Pi_{x^{IV}} + \lambda' \cdot \partial\Pi'_{x^{IV}} + \lambda'' \cdot \partial\Pi''_{x^{IV}}) \cdot (X_4 \cdot \partial x - X \cdot \partial x^{IV}) \\ +(\partial\Pi_{x'''} + \lambda' \cdot \partial\Pi'_{x'''} + \lambda'' \cdot \partial\Pi''_{x'''}) \cdot (X_3 \cdot \partial x - X \cdot \partial x''') \\ =(\partial\Pi_{(t)} + \lambda' \cdot \partial\Pi'_{(t)} + \lambda'' \cdot \partial\Pi''_{(t)}) \cdot X \end{cases}.$$

Dieser Gleichung wird wieder am allgemeinsten genügt, wenn man $x$, $x'$, $x''$, $x'''$, $x^{IV}$ als solche Funktionen von $t$ sich denkt, welche die beiden Gleichungen

$$(\odot_1)\cdots \quad \frac{\partial x}{X} = \frac{\partial x'''}{X_3} = \frac{\partial x^{IV}}{X_4}$$

identisch machen, dann aber $\Pi$, $\Pi'$, $\Pi''$ so nimmt, daß $\Pi_{(t)}$, $\Pi'_{(t)}$ und $\Pi''_{(t)}$ für diese aus $(\odot_1)$ zu entnehmenden Werthe konstant werden.

Denkt man sich aber nun den Ausdrücken $\lambda'$ und $\lambda''$ andere Werthe gegeben und zwar solche, welche in (13.) die Koeffizienten von $\partial x''_{x'''}$ und $\partial x_{x'''}$ zu Null machen, so machen sie auch in (14.) die Koeffizienten von $\partial x''_{x^{IV}}$ und $\partial x_{x^{IV}}$ zu Null, so wie noch in (16.) die Koeffizienten von $\partial x''$ und $\partial x$ der Null gleich. Aus den Gleichungen (13. und 14.) ergeben sich dann die Werthe von $\partial x'_{x'''}$ und $\partial x'_{x^{IV}}$; und diese, in die Gleichung (2.) substituirt, geben die zweite der gesuchten Eliminationsgleichungen, nämlich

$$\text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\partial\Pi_{x^{IV}} + \lambda' \cdot \partial\Pi'_{x^{IV}} + \lambda'' \cdot \partial\Pi''_{x^{IV}}) \cdot X_4 \\ +(\partial\Pi_{x'''} + \lambda' \cdot \partial\Pi'_{x'''} + \lambda'' \cdot \partial\Pi''_{x'''}) \cdot X_3 \\ +(\partial\Pi_{x'} + \lambda' \cdot \partial\Pi'_{x'} + \lambda'' \cdot \partial\Pi''_{x'}) \cdot X_1 \end{array} \right\} = 0,$$

welche von der Gleichung (16.), wie sie für die jetzigen Werthe von $\lambda'$ und $\lambda''$ geworden ist, links wiederum nur dadurch abweicht, daß hier $X_4$, $X_3$, $X_1$ steht, wo dort $\partial x^{IV}$, $\partial x'''$ und $\partial x'$ zu finden ist.

Der aus der Gleichung (II.) und aus der Gleichung (16.),

wie sie für die jetzigen Werthe von $\lambda'$ und $\lambda''$ geworden ist, gebildete, der Gleichung (7. des §. 429.) analogen Gleichung

$$(\mathbb{C}_2)\cdots\left\{\begin{array}{r}(\partial\Pi_{x^{IV}}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x^{IV}}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x^{IV}})\cdot(X_4\cdot\partial x'-X_1\cdot\partial x^{IV})\\ +(\partial\Pi_{x'''}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x'''}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x'''})\cdot(X_3\cdot\partial x'-X_1\cdot\partial x''')\\ =(\partial\Pi_{(t)}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{(t)}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{(t)})\cdot X_1\end{array}\right\}.$$

wird nun wieder am allgemeinsten genügt, wenn man den beiden Gleichungen

$$(\odot_2)\cdots\qquad \frac{\partial x'}{X_1}=\frac{\partial x'''}{X_3}=\frac{\partial x^{IV}}{X_4}$$

durch Funktionen von t zu genügen sucht, für diese Funktionen aber die Funktionen $\Pi$, $\Pi'$ und $\Pi''$ konstant werden läßt.

Durch eine dritte analoge Annahme von $\lambda'$ und $\lambda''$ erhält man aber die dritte Eliminationsgleichung

$$\text{III.}\quad\left\{\begin{array}{l}(\partial\Pi_{x^{IV}}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x^{IV}}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x^{IV}})\cdot X_4\\ +(\partial\Pi_{x'''}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x'''}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x'''})\cdot X_3\\ +(\partial\Pi_{x''}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x''}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x''})\cdot X_2\end{array}\right\}=0,$$

welche sich von der Gleichung (16.), wie sich solche jetzt für diese dritten Werthe von $\lambda'$ und $\lambda''$ gestaltet hat, links nur dadurch unterscheidet, daß hier $X_4, X_3, X_2$ steht, wo dort $\partial x^{IV}, \partial x''', \partial x''$.

Der aus der Gleichung (III.) und aus der Gleichung (16.), wie sie sich jetzt gestaltet hat, gezogenen, der Gleichung (7. des §. 429.) analogen Gleichung

$$(\mathbb{C}_3)\cdots\left\{\begin{array}{r}(\partial\Pi_{x^{IV}}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x^{IV}}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x^{IV}})\cdot(X_4\cdot\partial x''-X_2\cdot\partial x^{IV})\\ +(\partial\Pi_{x'''}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{x'''}+\lambda''\cdot\partial\Pi''_{x'''})\cdot(X_3\cdot\partial x''-X_2\cdot\partial x''')\\ =(\partial\Pi_{(t)}+\lambda'\cdot\partial\Pi'_{(t)}+\lambda''\cdot\partial\Pi_{(t)})\cdot X_2\end{array}\right\}$$

wird nun wieder am allgemeinsten genügt, durch solche Funktionen von t, welche den beiden Gleichungen

$$(\odot_3)\cdots\qquad \frac{\partial x''}{X_2}=\frac{\partial x'''}{X_3}=\frac{\partial x^{IV}}{X_4}$$

genügen, und für welche ausserdem nach die Funktionen $\Pi$, $\Pi'$ und $\Pi''$ konstant werden.

Weil indeß die Gleichungen $(\odot_1; \odot_2; \odot_3)$ sich in die 4

Gleichungen

$$(\odot)\cdots \qquad \frac{\partial x}{X} = \frac{\partial x'}{X_1} = \frac{\partial x''}{X_2} = \frac{\partial x'''}{X_3} = \frac{\partial x^{IV}}{X_4}$$

vereinigen, so folgt: Wenn diese 4 totalen Differenzialgleichungen ($\odot$) integrirt sind, und für die gefundenen Werthe von $x$, $x'$, $x''$, $x'''$ und $x^{IV}$ (in t), oder vielmehr für die gefundenen Werthe von $x'$, $x''$, $x'''$, $x^{IV}$ (in x), sowohl $\Pi$, als auch $\Pi'$ und $\Pi''$ konstant werden, so hat man den dreien hier erhaltenen, der Gleichung (7. des §. 429.) analogen Gleichungen ($\mathfrak{C}_1$; $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$), also auch den Gleichungen (I.—III.) und (1.—3.) am allgemeinsten genügt.

Die Integration der 4 Gleichungen ($\odot$) führt aber 4 willkührliche Konstanten $c_1$, $c_2$, $c_3$ und $c_4$ ein; und man kann diese 4 Integralgleichungen nach diesen 4 Konstanten algebraisch aufgelößt, also in der Form

$$c_1 = f_1; \qquad c_2 = f_2; \qquad c_3 = f_3 \quad \text{und} \quad c_4 = f_4$$

hingestellt sich denken. Hernach ist klar, daß wenn man statt $\Pi$, $\Pi'$, $\Pi''$ ganz willkührliche Funktionen dieser 4 Ausdrücke $f_1$, $f_2$, $f_3$ und $f_4$ nimmt, solche konstant werden, so oft man statt $x$, $x'$, $x''$, $x'''$, $x^{IV}$ die oben (aus $\odot$) gefundenen Funktionen von t, d. h. statt $x'$, $x''$, $x'''$, $x^{IV}$ die oben gefundenen Funktionen von x setzt, während $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ bestimmte Funktionen der 5 Veränderlichen $x$, $x'$, $x''$, $x'''$, $x^{IV}$ sind.

Die 3 Gleichungen

$$\Pi_{f_1,f_2,f_3,f_4} = 0; \qquad \Pi'_{f_1,f_2,f_3,f_4} = 0 \quad \text{und} \quad \Pi''_{f_1,f_2,f_3,f_4} = 0,$$

wo $\Pi$, $\Pi'$, $\Pi''$ ganz willkührliche Funktionen vorstellen, genügen also am allgemeinsten den 3 gegebenen Parzialgleichungen (1—3.). In diesem Falle werden aber irgend 3 der 4 Ausdrücke $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ ganz willkührliche Funktionen des vierten.

## §. 434.

Solche Betrachtungen, wie die in dem vorhergehenden (§. 433.) angestellten, waren es vielleicht, durch welche Jacobi die gleichzeitige Integration einer beliebigen Zahl solcher lineären Gleichungen bewerkstelligt hat, indem er folgenden Lehrsatz hinstellt:

Die m lineären Parzialgleichungen

$$\text{I.}\begin{cases} X_n \cdot \partial x_{x(n)} + X_{n-1} \cdot \partial x_{x(n-1)} + \cdots + X_m \cdot \partial x_{x(m)} = X; \\ X_n \cdot \partial x'_{x(n)} + X_{n-1} \cdot \partial x'_{x(n-1)} + \cdots + X_m \cdot \partial x'_{x(m)} = X_1; \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ X_n \cdot \partial x^{(m-1)}_{x(n)} + X_{n-1} \cdot \partial x^{(m-1)}_{x(n-1)} + \cdots + X_m \cdot \partial x^{(m-1)}_{x(m)} = X_{m-1}; \text{*)} \end{cases}$$

in denen m der n+1 Veränderlichen $x, x', x'', \cdots x^{(n)}$ als Funktionen der n+1—m übrigen angesehen sind, während $X_n, X_{n-1}, \cdots X_m, X_{m-1}, \cdots X_1, X$ gegebene Funktionen aller n+1 Veränderlichen vorstellen, werden am allgemeinsten integrirt, wenn man die n totalen Differenzialgleichungen

$$(\odot)\cdots \quad \frac{\partial x}{X} = \frac{\partial x'}{X_1} = \cdots = \frac{\partial x^{(m)}}{X_m} = \cdots = \frac{\partial x^{(n-1)}}{X_{n-1}} = \frac{\partial x^{(n)}}{X_n}$$

unter der Voraussetzung integrirt, daß alle n+1 Veränderliche $x, x', x'', \cdots x^{(n)}$ Funktionen eines und desselben beliebigen neuen Veränderlichen t (oder n der Veränderlichen, Funktionen des n+1sten) sind; die n Integralgleichungen nach den n eingehenden willkührlichen Konstanten $c_1, c_2, c_3, \cdots c_n$ algebraisch auflößt, also in der Form

$$\text{II.} \quad c_1 = f_1; \quad c_2 = f_2; \quad c_3 = f_3; \cdots; c_n = f_n$$

hinstellt, wo $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ bestimmte Funktionen der n+1 Veränderlichen $x, x', x'', \cdots, x^{(n)}$ seyn werden; — zuletzt aber die m Gleichungen

$$\text{III.} \quad \Pi_1 = 0; \quad \Pi_2 = 0; \quad \Pi_3 = 0; \cdots; \Pi_m = 0,$$

wo $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_m$ ganz willkührliche Funktionen der n Ausdrücke $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ vorstellen, als das gesuchte allgemeine Integral nimmt.

Dieser Satz ist nach Anleitung des (§. 433.) leicht zu finden; und wenn er als Lehrsatz hingestellt wird, so läßt sich auch wiederum leicht

---

*) Diese Gleichungen haben alle beziehlich dieselben Koeffizienten auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, und jede derselben enthält die Ableitungen eines und desselben abhängigen Veränderlichen nach jedem unabhängigen Veränderlichen einzeln genommen.

beweisen, daß diese m Integralgleichungen den gegebenen m Parzialgleichungen wirklich genügen. (M. s. Crelle's Journal f. d. Math. II. 4. pag. 321.).

Anmerkg. 1. Fügen wir hier noch folgende Betrachtungen hinzu:

1) Die m Integralgleichungen (III.) liefern m der n Ausdrücke $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ als ganz willkührliche Funktionen der n—m übrigen.

Die m Gleichungen

IV. $f_1 = \psi_1;\ f_2 = \psi_2;\ f_3 = \psi_3;\ \cdots\ f_m = \psi_m$

bilden daher ebenfalls das allgemeine Integral der gegebenen m Parzialgleichungen, sobald nur $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots \psi_m$ ganz willkührliche Funktionen der n—m Ausdrücke $f_{m+1}, f_{m+2}, \cdots f_{n-1}, f_n$ vorstellen.

2) Ist $m = n$, d. h. sind n solche lineäre Gleichungen gegeben, welche dann links nur ein einziges mit $X_n$ affizirtes Glied enthalten, also die Form annehmen

$$\partial x_{x^{(n)}} = \frac{X}{X_n};\ \partial x'_{x^{(n)}} = \frac{X_1}{X_n};\ \cdots\ \partial x^{(n-1)}_{x^{(n)}} = \frac{X_{n-1}}{X_n},$$

so werden jetzt die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_m$ oder $\psi_n$ bloß willkührliche Konstanten, und die Gleichungen (IV.) gehen daher jetzt in die obigen Gleichungen (II.) über. Und dies muß auch so seyn; denn die gegebenen Differenzialgleichungen sind in diesem speziellen Falle, wo $m = n$ ist, nicht mehr Parzialgleichungen, sondern sind von den obigen n Gleichungen (⊙) nicht weiter verschieden. Den Gleichungen (⊙) kommen aber die Gleichungen (II.), der Voraussetzung gemäß, als Integrale zu.

3) Ist aber $m = 1$, ist also nur eine einzige solche lineäre Partialgleichung gegeben, welche folgende ist

$$X_n \cdot \partial x_{x^{(n)}} + X_{n-1} \cdot \partial x_{x^{(n-1)}} + \cdots + X_1 \cdot \partial x_{x'} = X;$$

so gehen auch die m Gleichungen (IV.) nun in eine einzige Integralgleichung

$$f_1 = \psi_{f_2, f_3, \cdots, f_n}$$

über; und dies stimmt wieder genau mit dem Resultat der (§§. 429.—432.).

---

## Zweite Abtheilung.

### Allgemeine Integration der nicht linearen Parzialgleichungen der ersten Ordnung.

---

### A. Die Methode des Lagrange für Parzialgleichungen zwischen 3 Veränderlichen, nebst der Erweiterung dieser Methode für Parzialgleichungen zwischen 4 und mehr Veränderlichen.

#### §. 435.

Ist die beliebige Parzialgleichung

$$1) \qquad F_{x;\, x';\, x'';\, \partial x_{x'};\, \partial x_{x''}} = 0;$$

zu integriren, so führe man zwei neue Veränderliche $p'$ und $p''$ durch die Gleichungen

$$2) \qquad \partial x_{x'} = p' \quad \text{und} \quad \partial x_{x''} = p''$$

ein, so daß die Gleichung (1.) in folgende übergeht, nämlich in

$$3) \qquad F_{x;\, x';\, x'';\, p';\, p''} = 0;$$

und man hat nun $p'$ und $p''$ als solche Funktionen von $x$, $x'$ und $x''$, und zugleich auch $x$ als eine solche Funktion von $x'$ und $x''$ zu suchen, daß den 3 Gleichungen (2. und 3.) am allgemeinsten ein Genüge geschieht. — Der Gleichung (3.) ist aber sogleich dadurch genügt, daß man solche nach $p''$ algebraisch auflößt, also aus ihr

$$4) \qquad p'' = P''_{x;\, x';\, x'';\, p'}$$

gefunden, und dann überall unter $p''$ diese Funktion von $x$, $x'$, $x''$ und $p'$ vorgestellt sich denkt.

Es bleibt daher jetzt nur noch, unter dieser letztern Voraussetzung, den Gleichungen (2.), d. h. nach (§. 406. d. VI. Th. d. S.) der einzigen Gleichung

$$5)\quad \partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

zu genügen übrig; d. h. man darf jetzt nur noch die Gleichung (5.) (nach §. 396. oder §. 402. d. VI. Th. d. S.) integriren, dabei aber, während statt $p''$ die Funktion aus (4.) gesetzt worden ist, noch statt $p'$ eine ganz beliebige Funktion von $x$, $x'$ und $x''$ setzen, jedoch eine solche, welche die Gleichung (5.) integrabel macht, also welche der Bedingungsgleichung der Integrabilität (§§. 396. 402. und 406. d. VI. Th. d. S.) d. h. der Gleichung

$$6)\quad \partial p'_{x''} - \partial p''_{(x')} + p'' \cdot \partial p'_x - p' \cdot \partial p''_{(x)} = 0$$

genügt.

Weil aber aus (4.)

$$7)\quad \partial p''_{(x')} = \partial p''_{x'} + \partial p''_{p'} \cdot \partial p'_{x'}$$

und

$$8)\quad \partial p''_{(x)} = \partial p''_x + \partial p''_{p'} \cdot \partial p'_x$$

ist; weil ferner $p''$, als Funktion von $x$, $x'$, $x''$ und $p'$, gegeben ist durch die Gleichung (3.), d. h. durch die Gleichung

$$3)\quad F_{x;x';x'';p';p''} = 0;$$

so muß man auch $\partial p''_{x'}$; $\partial p''_x$ und $\partial p''_{p'}$ aus derselben Gleichung (3.) herholen, indem man in ihr unter $p''$ die durch sie bestimmte Funktion vorgestellt sich denkt, und dann diese Gleichung, die nun identisch ist, nach allem $x'$, nach allem $x$, und nach allem $p'$ differenzirt, wodurch man erhält

$$9)\quad \partial F_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_{x'} = 0,$$

$$10)\quad \partial F_x + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_x = 0,$$

und

$$11)\quad \partial F_{p'} + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_{p'} = 0.$$

Dadurch nimmt die Gleichung (6.), welche zur Bestimmung von $p'$ dient, nachdem alle Ableitungen von $p''$ aus ihr eliminirt sind, sogleich diese andere Gestalt an, nämlich

$$12)\quad \partial F_{p''} \cdot \partial p'_{x''} + \partial F_{p'} \cdot \partial p'_{x'} + (p'' \cdot \partial F_{p''} + p' \cdot \partial F_{p'}) \cdot \partial p'_x = -(\partial F_{x'} + p' \cdot \partial F_x),$$

wo man sich nur noch unter $p''$ die in (4.) aus (3.) gefundene Funktion von $x$; $x'$; $x''$ und $p'$ zu denken hat. *)

Man hat also nun der Gleichung (12.) durch Werthe von $p'$ zu genügen, den Werth von $p''$ aus (3. oder 4.) dazu zu finden (in $x$; $x'$; $x''$ ausgedrückt), diese Werthe von $p'$ und $p''$ in die Gleichung (5.) d. h. in

$$5) \qquad \partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

statt $p'$ und $p''$ zu substituiren; und diese Gleichung ist dann

---

*) Zu derselben Gleichung, um $p'$ zu bestimmen, wäre man auch gelangt, wenn man nicht zuerst der Gleichung (3.) genügt, sondern zur Bestimmung von $p'$ und $p''$ als Funktionen von $x$, $x'$ und $x''$ die Gleichung (3.) und noch die andere Gleichung genommen hätte, welche aus den beiden Gleichungen (2.) hervorgeht, wenn man die Ableitungen von $x$ nach $x'$ und $x''$ aus ihnen eliminirt, so daß sie bloß $p'$ und $p''$ und Ableitungen von $p'$ und $p''$ enthält. Um aber diese Elimination zu bewerkstelligen, muß man die erstere der Gleichungen (2) nach $x''$, die andere nach $x'$ differenziiren, und die Resultate subtrahiren. Dann erhält man für diese andere Gleichung

$$\partial p'_{(x'')} - \partial p''_{(x')} = 0 \quad \text{oder} \quad (\text{ठ}) \cdots \partial p'_{x''} - \partial p''_{x'} + p'' \cdot \partial p'_x - p' \cdot \partial p''_x = 0,$$

welche von der Gleichung (6.) in so ferne verschieden ist, als hier jetzt nicht unter $p''$ die bekannte Funktion vou $x$, $x'$, $x''$ und $p'$ aus (4.) gedacht wird, sondern unter $p'$ und $p''$ die gesuchten Funktionen von $x$, $x'$ und $x''$. — Da man aber nach der jetzigen Ansicht zur Bestimmung der gesuchten Funktionen $p'$ und $p''$ zwei Gleichungen hat, nämlich die Gleichungen (3.) und (ठ), so muß man nun vor allen Dingen aus ihnen jede Spur von $p''$ eliminiren, um eine einzige Gleichung übrig zu behalten zur Bestimmung von $p'$. Zu dem Ende muß die Gleichung (3.), welche identisch ist, so oft unter $p'$ und $p''$ die gesuchten Funktionen von $x$, $x'$ und $x''$ gedacht werden, in diesem Sinne nach allem $x$ und nach allem $x'$ differenziirt werden, so daß man erhält

$$\partial F_x + \partial F_{p'} \cdot \partial p'_x + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_x = 0$$

und

$$\partial F_{x'} + \partial F_{p'} \cdot \partial p'_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_{x'} = 0.$$

Eliminirt man aber aus diesen beiden Gleichungen und aus der (ठ) die beiden Ableitungen $\partial p''_x$ und $\partial p''_{x'}$ so erhält man genau die obige Gleichung (12.) wieder, während hier auch noch $p''$ selbst mittelst der Gleichung (3.) eliminirt, d. h. statt $p''$ der aus (3.) gezogene Werth (4.) gesetzt gedacht werden muß.

(eben weil die Gleichung (12.) keine andere als die Bedingungsgleichung ihrer Integrabilität ist) nothwendig integrabel; sie wird integrirt, und sie liefert dann die gesuchte Gleichung zwischen $x$, $x'$, $x''$, welche allen Bedingungen genügt, und welche namentlich die Gleichungen (2. und 3.), also auch die gegebene Parzialgleichung (1.) identisch macht.

Findet man nun aus der Gleichung (12.), welches eine lineäre Parzialgleichung zwischen 4 Veränderlichen ist, für $p'$ bloß einen Werth ohne willkührliche Funktion und ohne willkührliche Konstante, so giebt die Gleichung (5.) ein Integral mit einer einzigen Konstante, d. h. ein ausreichendes Integral (Vgl. §. 287. IV. d. V. Th. d. S.). — Nimmt man aus der Gleichung (12.) für $p'$ einen genügenden Werth mit einer willkührlichen Konstante, so liefert die Gleichung (5.) ein Integral mit 2 Konstanten, d. h. ein vollständiges (Vgl. §. 287. V. d. V. Th. d. S.). — Und nimmt man endlich $p'$ aus (12.) am allgemeinsten, so daß in $p'$ nach (§. 430.) eine willkührliche Funktion eingeht, so liefert die Gleichung (5.) nothwendig das allgemeine Integral dazu. (Vgl. §. 286. d. V. Th. d. S.).

Um jedoch die Gleichung (12.) am allgemeinsten zu integriren, muß man nach (§. 430.) verfahren, d. h. die 3 totalen Differenzialgleichungen

$$13)\quad \frac{\partial x''}{\partial F_{p''}} = \frac{\partial x'}{\partial F_{p'}} = \frac{\partial x}{p''\cdot\partial F_{p''} + p'\cdot\partial F_{p'}} = -\frac{\partial p'}{\partial F_{x'} + p'\cdot\partial F_{x}}$$

nach (§. 282. d. V. Th. d. S.) integriren *), die 3 Integralgleichungen in der Form

$$14)\quad c_1 = P_{x;x';x'';p'};\ c_2 = Q_{x;x';x'';p'} \text{ und } c_3 = R_{x;x';x'';p'}$$

---

*) Dieses Schema (13.) enthält eigentlich 6 Gleichungen von denen jedoch irgend dreie aus den drei übrigen bloß algebraische Folgen sind. — Man kann daher von diesen 6 Gleichungen irgend dreie nehmen, oder auch irgend 3 neue Gleichungen, welche aus diesen 6 Gleichungen durch irgend welche algebraische Verbindungen hervorgehen, und solche nach (§. 282. d. V. Th. d. S.) integriren, um die 3 Integralgleichungen zu erhalten, welche die Stelle der Gleichungen (14.) einnehmen.

hinstellen, wo $c_1$, $c_2$, $c_3$ die durch die Integration eingegangenen willkührlichen Konstanten sind, und zuletzt

15) $$R = \psi_{P,Q}$$

nehmen, *) wo $\psi$ eine ganz willkührliche Funktion von P und Q vorstellt.

## §. 436.

Hat man nun aus den Gleichungen (15. und 3.) $p'$ und $p''$ gefunden, so muß man jetzt diese Werthe in die Gleichung (5.), nämlich in

5) $$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0,$$

statt $p'$ und $p''$ substituiren, und letztere Gleichung dann vollends, als eine totale Differenzialgleichung zwischen den 3 Veränderlichen $x$, $x'$ und $x''$ integriren. — Weil es aber im Allgemeinen nicht möglich ist, aus der Gleichung $R = \psi_{P,Q}$ die Funktion von $x$, $x'$ und $x''$, welche sie für $p'$ liefert, wirklich herzustellen, so wird es zur Fortsetzung der Rechnung gerathener, statt der Veränderlichen $x$, $x'$, $x''$ neue Veränderliche P, Q, R einzuführen, mittelst der Gleichungen

16) $P_{x;x';x'';p'} = P$; $Q_{x;x';x'';p'} = Q$ und $R_{x;x';x'';p'} = R$;

weil dann wenigstens der eine dieser neuen Veränderlichen, mittelst der Gleichung $R = \psi_{P,Q}$, bereits in entwickelter Form in die beiden andern ausgedrückt ist.

So wie aber diese neuen Veränderlichen P, Q, R mittelst der Gleichungen (16.) eingeführt sind, so liefern dieselben Gleichungen, wenn man sie nach $x$, $x'$ und $x''$ algebraisch auflößt, sogleich diese letztern in $p'$, P, Q, R ausgedrückt, so daß man

17) $x = x_{P,Q,R,p'}$; $x' = x'_{P,Q,R,p'}$ und $x'' = x''_{P,Q,R,p'}$

erhält. Aus diesen Gleichungen (17.) folgt aber dann sogleich

---

*) Daß dasselbe allgemeine Integral der Gleichung (12.) auch in der Form

$$Q = \psi'_{P,R} \quad \text{oder} \quad P = \psi''_{Q,R}$$

hingestellt werden könne, ist aus demselben (§. 430.) bekannt genug.

$$18)\quad \left\{\begin{aligned} \partial x &= \partial x_P \cdot \partial P + \partial x_Q \cdot \partial Q + \partial x_R \cdot \partial R + \partial x_{p'} \cdot \partial p' \\ \partial x' &= dx'_P \cdot \partial P + \partial x'_Q \cdot \partial Q + \partial x'_R \cdot \partial R + \partial x'_{p'} \cdot \partial p' \\ \partial x'' &= \partial x''_P \cdot \partial P + \partial x''_Q \cdot \partial Q + \partial x''_R \cdot \partial R + \partial x''_{p'} \cdot \partial p' \end{aligned}\right\}.$$

Subſtituirt man zuletzt dieſe Werthe aus (17. und 18.) ſtatt $x$, $x'$, $x''$, $\partial x$, $\partial x'$, $\partial x''$ in die Gleichung (5.), ſo wird ſolche übergehen in eine Gleichung von der Form

$$19)\quad \mathfrak{P}\cdot\partial P + \mathfrak{Q}\cdot\partial Q + \mathfrak{R}\cdot\partial R + K\cdot\partial p' = 0,$$

wo im Allgemeinen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ und $K$ Funktionen von $P$, $Q$, $R$ und $p'$ ſeyn werden. Es wird ſich aber zeigen laſſen, daß das mit $\partial p'$ affizirte Glied allemal von ſelber wegfällt, daß alſo $K = 0$ ſeyn muß, und daß auch in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ nicht mehr $p'$ vorkommt, oder doch nur in einem gemeinſchaftlichen Faktor, durch welchen die ganze Gleichung wegdividirt werden kann.

Man macht nämlich die Bemerkung, daß wenn man von den 4 gleichen Quozienten der (13.), den 4ten wegläßt, aus den Gleichungen, welche nun noch vorhanden ſind, nämlich aus

$$\frac{\partial x''}{\partial F_{p''}} = \frac{\partial x'}{\partial F_{p'}} = \frac{\partial x}{p''\cdot\partial F_{p''} + p'\cdot\partial F_{p'}},$$

ſobald man $\partial F_{p''}$ eliminirt, allemal $\partial F_{p'}$ von ſelbſt mit wegfällt, und die Gleichung (5.) d. h.

$$5)\quad \partial x - p'\cdot\partial x' - p''\cdot\partial x'' = 0$$

hervorgeht *). Daraus folgt, daß alle die Werthe, welche den Gleichungen (13.) genügen, auch die (5.) d. h. auch die Gleichung (19.) identiſch machen müſſen. Dies ſind aber die Werthe (14.), d. h., wenn man die neuen Veränderlichen nimmt, die Werthe

---

*) Man darf nur die 3 gleichen Quozienten ſo ſchreiben

$$\frac{p''\cdot\partial x''}{p''\cdot\partial F_{p''}} = \frac{p'\cdot\partial x'}{p'\cdot\partial F_{p'}} = \frac{\partial x}{p''\cdot\partial F_{p''} + p'\cdot\partial F_{p'}},$$

und dann den Satz anwenden, daß ſo oft $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ iſt, auch nothwendig $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ ſeyn müſſe; ſo wird man die Gleichung (5.) haben.

$$P = c_1; \quad Q = c_2; \quad R = c_3.$$

Also muß die Gleichung (19.) identisch werden, so oft statt P, Q und R zugleich konstante Werthe, d. h. so oft statt ∂P, ∂Q, ∂R zu gleicher Zeit 0 gesetzt wird. Deshalb zeigt sich nothwendig (aus 19.)

$$20) \qquad K = 0,$$

so daß die Gleichung (19.) in diese

$$21) \qquad \mathfrak{P}\cdot\partial P + \mathfrak{Q}\cdot\partial Q + \mathfrak{R}\cdot\partial R = 0$$

übergeht. Dies ist also die transformirte Gleichung (5.), welche nun noch integrirt werden muß, während sie allemal integrabel ist, sobald die Bedingungsgleichung der Integrabilität (12.), d. h. die an die Stelle dieser letztern getretene Gleichung (15.) erfüllt ist, d. h. sobald man überall statt R die Funktion $\psi_{P,Q}$ setzt. Die durch diese letztere Substitution aus der Gleichung (21.) hervorgehende Gleichung

$$22) \qquad (\mathfrak{P} + \mathfrak{R}\cdot\partial\psi_P)\cdot\partial P + (\mathfrak{Q} + \mathfrak{R}\cdot\partial\psi_Q)\cdot\partial Q = 0$$

ist also nicht bloß die transformirte Gleichung (5.), welche noch integrirt werden muß, sondern sie ist auch nothwendig allemal integrabel. Aber eben deshalb können die Koeffizienten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [nachdem die Gleichung (19. oder 21. oder 22.) gehörig wegdividirt worden ist] in keinem Falle außer den Veränderlichen P, Q, R noch den Veränderlichen p′ enthalten, weil sonst das Integral der Gleichung (22.) existiren, dabei aber die Form

$$X_{P,Q,R,p'} = C$$

haben würde, demnach das Differenzial dieser letztern, also die obige (22.) selbst, auch noch ein mit ∂p′ behaftetes Glied haben müßte.

Integrirt man nun diese Gleichung (22.), welches die transformirte Gleichung (5.) ist, so erhält man eine Gleichung bloß zwischen P und Q, so daß dieses Integral in der Form

$$23) \qquad Q = \varphi_P$$

gedacht werden kann, während die Form der Funktion $\varphi$ von der Form der Funktion $\psi$ abhängig ist.

Weil aber sonach $Q = \varphi_P$ ist, so wird auch $R, = \psi_{P,Q}$ eine bloße Funktion von P, welche durch $f_P$ bezeichnet werden kann; und man kann daher statt der Gleichung

$$R = \psi_{P,Q}$$

eben so gut die Gleichung $R = f_P$ setzen, wenn man nur nicht vergißt, daß die Funktionen f und $\varphi$ von einander abhängig sind.

Und weil die beiden Gleichungen

24) $$R = f_P \quad \text{und} \quad Q = \varphi_P$$

die Gleichung (21.) identisch machen müssen, letztere aber, durch die Substitution der Werthe $f_P$ und $\varphi_P$ statt R und Q, in diese andre

25) $$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \cdot \partial\varphi_P + \mathfrak{R} \cdot \partial f_P = 0$$

übergeht, so drückt letztere Gleichung (25.) diese Abhängigkeit zwischen den Funktionen $\varphi_P$ und $f_P$ vollkommen aus, in so ferne $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ vermöge derselben Substitutionen jetzt bloß P, $f_P$ und $\varphi_P$ enthalten.

Setzt man also in die beiden Gleichungen (24.), nachdem man der Abhängigkeit (25.) genügt hat, statt der Veränderlichen P, Q und R wieder ihre Werthe aus den Gleichungen (16.), und eliminirt man dann aus denselben beiden Gleichungen noch den Veränderlichen p'; so hat man allemal ein Integral der gegebenen Parzialgleichung (1.), und dieses Integral ist das allgemeine, sobald man eine der Funktionen $\varphi_P$ oder $f_P$ ganz willkührlich läßt, dagegen ein besonderes, wenn man statt einer dieser Funktionen z. B. statt $f_P$ irgend eine bestimmte Zusammensetzung aus P schreibt, und dann die Gleichung (25.) als eine Gleichung zwischen P, $\varphi$ und $\partial\varphi_P$, d. h. als eine totale Differenzialgleichung zwischen den beiden Veränderlichen P und $\varphi$ integrirt, um $\varphi = \varphi_P$ dazu zu erhalten. *)

---

*) Diese Methode hat Lagrange zuerst so weit gegeben, als sie hier in dem (§. 435.) entwickelt sich findet (Vgl. d. Memoiren der Ber-

Beispiel. Ist zu integriren die Parzialgleichung

1) $$x = \partial x_{x'} \cdot \partial x_{x''};$$

so hat man

2) $$F_{x;x';x'';p';p''} = x - p' \cdot p'' = 0;$$

also

3) $\partial F_{x'} = 0;\ \partial F_{x''} = 0;\ \partial F_x = 1;\ \partial F_{p'} = -p'';\ \partial F_{p''} = -p'.$

Die 3 Gleichungen (N. 13. des Textes) werden daher jetzt folgende:

$$-p'' \cdot \partial x'' + p' \cdot \partial x' = 0; \quad -p'' \cdot \partial x + 2p' \cdot p'' \cdot \partial x' = 0,$$
$$-p'' \cdot \partial p' + p' \cdot \partial x' = 0;$$

oder, wenn man $\frac{x}{p'}$ statt $p''$ setzt, folgende:

4) $$\left\{\begin{matrix} x \cdot \partial x'' - p'^2 \cdot \partial x' = 0 \\ \partial x - 2p' \cdot \partial x' = 0 \\ x \cdot \partial p' - p'^2 \cdot \partial x' = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Die erstere und die letztere derselben geben

5) $$\partial x'' = \partial p', \text{ also } x'' = p' + c_1.$$

Die 2te und 3te der Gleichungen (4.) geben dagegen

6) $$p' \cdot \partial x = 2x \cdot \partial p'; \quad \text{d. h.} \quad x = c_2 \cdot p'^2.$$

Substituirt man aber diese gefundenen Werthe in die erstere der 3

---

liner Akademie vom Jahre 1772 und den Artikel (104.) in seiner Théorie des fonctions). Erst viel später ist ihm die Vollendung derselben gelungen, so wie sie hier, dem Wesen nach, in dem (§. 436.) zu finden ist. (Vgl. Léçons sur le calcul des fonctions Leç. XX.). — Lange vorher ehe dieses letztere geschehen war, hat sie Charpit (in einem, der Pariser Akademie im Jahre 1784 vorgelegten aber ungedruckt gebliebenen Memoire) dadurch einstweilen ausführbar zu machen gesucht, daß er bloß einen der, der Gleichung (12.) genügenden Werthe von $p'$ nahm, etwa bloß

$$R = c_3 \quad \text{statt} \quad R = \psi_{P,Q}'$$

daraus $p'$ bestimmte, diese Werthe statt $p'$ und $p''$ in die Gleichung

$$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

substituirte, und letztere integrirte, wodurch er nicht das allgemeine aber doch das vollständige Integral der gegebenen Parzialgleichung erhielt. (Vgl. weiter unten die Rubrik „Charpit's Methode.")

Gleichungen (4.), so erhält man noch

7) $c_2 \cdot \partial p' - \partial x' = 0$; d. h. $c_2 \cdot p' - x' = c_3$.

Also hat man dasmal

8) $P = x'' - p'$; $Q = \frac{x}{p'^2}$ und $R = \frac{x}{p'} - x'$.

Setzt man nun in die Gleichung

9) $x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$,

statt $p''$ seinen Werth $\frac{x}{p'}$ aus (1.), so wird sie

10) $x - p' \cdot \partial x' - \frac{x}{p'} \cdot \partial x'' = 0$.

Führt man aber die neuen Veränderlichen P, Q, R ein, mittelst der Gleichungen (8.), so findet man daraus

11) $x'' = p' + P$; $x = Q \cdot p'^2$
und $x' = Q \cdot p' - R$;

also

12) $\partial x'' = \partial p' + \partial P$; $\partial x = p'^2 \cdot \partial Q + 2Q \cdot p' \cdot \partial p'$
und $\partial x' = p' \cdot \partial Q + Q \cdot \partial p' - \partial R$.

Substituirt man nun diese Werthe in die zu integrirende Gleichung (10.), nämlich in $\partial x - p' \cdot \partial x' - \frac{x}{p'} \cdot \partial x'' = 0$, so geht sie über in

13) $-Q \cdot \partial P + 0 \cdot \partial Q + 1 \cdot \partial R = 0$

d. h. in

14) $-Q \cdot \partial P + \partial R = 0$.

Setzt man also

15) $Q = \varphi_P$ und $R = f_P$;

demnach $\partial Q = \partial \varphi_P \cdot \partial P$ und $\partial R = \partial f_P \cdot \partial P$,

und substituirt man diese Werthe in die Gleichung (14.), so erhält man

$$-\varphi_P + \partial f_P = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_P = \partial f_P.$$

Das System der beiden Gleichungen

16) $R = f_P$ und $Q = \partial f_P$

d. h.

17) $\frac{x}{p'} - x' = f_P$ und $\frac{x}{p'^2} = \partial f_P$,

während $P = x'' - p'$ ist, bildet also, wenn man sich $p'$ eliminirt

denkt, das allgemeine Integral der gegebenen Parzialgleichung

1) $$x - \partial x_{x'} \cdot \partial x_{x''} = 0.$$

## §. 437.

Diese in den (§§. 435. 436.) beschriebene Methode kann man aber auch dahin abändern, daß man nicht, wie Lagrange gethan hat, $p'$ und $p''$ als Funktionen von $x'$ und $x''$ sucht, welche $x'$ und $x''$ auch noch implizit in $x$ enthalten; — also daß man nicht $p'$ und $p''$ als Funktionen von $x'$, $x''$ und $x$ sucht, sondern sogleich $x$, $p'$ und $p''$ direkt als Funktionen von $x'$ und $x''$, welche nicht mehr $x$ selber enthalten, welche aber den dortigen dreien Gleichungen

2) $$\partial x_{x'} = p'; \qquad \partial x_{x''} = p'';$$

und

3) $$F_{x;x';x'';p';p''} = 0$$

genügen. Eliminirt man nämlich aus diesen Gleichungen (2.) unter dem jetzigen Gesichtspunkte den Veränderlichen $x$, so erhält man jetzt

4) $$\partial p''_{x'} = \partial p'_{x''}.$$

Die Gleichung (3.) ist jetzt bloß nach allem $x'$ und nach allem $x''$ identisch, giebt also, wenn man sie abwechselnd nach allem $x'$ und nach allem $x''$ differenziirt, jetzt

5) $$\partial F_{x'} + \partial F_x \cdot \partial x_{x'} + \partial F_{p'} \cdot \partial p'_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_{x'} = 0$$

6) $$\partial F_{x''} + \partial F_x \cdot \partial x_{x''} + \partial F_{p'} \cdot \partial p'_{x''} + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_{x''} = 0.$$

Man kann nun aus (4. und 5.) alle Ableitungen von $p''$, dagegen aus (4. und 6.) alle Ableitungen von $p'$ eliminiren, und man wird erhalten, wenn man noch $p'$ statt $\partial x_{x'}$ und $p''$ statt $\partial x_{x''}$ substituirt:

7) $$\partial F_{p'} \cdot \partial p'_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial p'_{x''} = -\partial F_{x'} - p' \cdot \partial F_x;$$

8) $$\partial F_{p'} \cdot \partial p''_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_{x''} = -\partial F_{x''} - p'' \cdot \partial F_x.$$

Zu diesen beiden lineären Parzialgleichungen (7. und 8.), von denen die eine bloß Ableitungen von $p'$, die andere bloß Ableitungen von $p''$ enthält, während in beiden die Ableitungen von

$p'$ und $p''$ mit einerlei Koeffizienten versehen sind, kann man noch leicht eine dritte hinzufügen, welche bloß Ableitungen der dritten gesuchten Funktion $x$, mit denselben Koeffizienten affizirt, enthält, indem man die beiden Gleichungen (2.) beziehlich mit $\partial F_{p'}$, und mit $\partial F_{p''}$ multiplizirt, und beide Resultate addirt.

Diese neue Gleichung wird dann folgende:

9) $$\partial F_{p'} \cdot \partial x_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial x_{x''} = p' \cdot \partial F_{p'} + p'' \cdot \partial F_{p''}.$$

Alle Funktionen $x_{x';x''}$; $p'_{x';x''}$; $p''_{x';x''}$, welche den Gleichungen (2. und 3.) genügen, genügen nun auch nothwendig den Gleichungen (7. 8. und 9.). Umgekehrt folgt daraus: Unter allen Funktionen $x_{x';x''}$; $p'_{x';x''}$ und $p''_{x';x''}$, welche den Gleichungen (7. 8. 9.) genügen, müssen nothwendig alle diejenigen mit begriffen seyn, welche auch den Gleichungen (2. und 3.) zukommen.

Diese 3 Gleichungen (7—9.) werden aber nach (§. 433.) integrirt, wenn man die 4 totalen Gleichungen

10) $$\frac{\partial x''}{\partial F_{p''}} = \frac{\partial x'}{\partial F_{p'}} = -\frac{\partial p'}{\partial F_{x'} + p' \cdot \partial F_x} = -\frac{\partial p''}{\partial F_{x''} + p'' \cdot \partial F_x} = \frac{\partial x}{p' \cdot \partial F_{p'} + p'' \cdot \partial F_{p''}},$$

(unter der Voraussetzung, daß $x''$; $x'$; $p'$; $p''$; $x$ Funktionen irgend eines neuen Veränderlichen $t$ sind, nach dem §. 282. oder nach der Anmerkung 1. zu §. 282. d. V. Th. d. S.) integrirt, den Integralgleichungen die Form giebt

11) $$c_1 = f_1; \quad c_2 = f_2; \quad c_3 = f_3 \quad \text{und} \quad c_4 = f_4$$

(wo $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ die 4 eingehenden willkührlichen Konstanten, wo aber $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ Funktionen von $x''$; $x'$; $x$; $p'$; $p''$ vorstellen) zuletzt aber

12) $$\Pi_1 = 0; \quad \Pi_2 = 0 \quad \text{und} \quad \Pi_3 = 0$$

nimmt, wo $\Pi_1$, $\Pi_2$ und $\Pi_3$ ganz willkührliche Funktionen der 4 Veränderlichen $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ seyn sollen, so daß diese Integrale (12.) auch in der Form

13) $$f_2 = \varphi_{f_1}; \quad f_3 = \psi_{f_1} \quad \text{und} \quad f_4 = \chi_{f_1}$$

geschrieben werden können, während $\varphi$, $\psi$ und $\chi$ ganz willkührliche Funktionen vorstellen.

## §. 438.

Sind aber durch die Gleichungen (13.) alle Funktionen von $x'$ und $x''$ bestimmt, welche statt x, $p'$ und $p''$ gesetzt werden müssen, damit den Gleichungen (7—9.) genügt sey, so muß man nun noch unter allen diesen Funktionen diejenigen heraussuchen, welche auch den Gleichungen (2. und 3.) genügen, welche letztere alle unter den vorigen allen mit begriffen seyn müssen.

Dadurch werden sich unter den Funktionen $\psi$, $\varphi$, $\chi$ und F Abhängigkeiten herausheben, so daß nur noch eine dieser 3 erstern Funktionen ganz willkührlich bleiben wird.

Weil aber durch die 3 Gleichungen der (N. 13.), nämlich durch

13) $$f_2 = \varphi_{f_1}; \quad f_3 = \psi_{f_1} \quad \text{und} \quad f_4 = \chi_{f_1}$$

die Funktionen x, $p'$ und $p''$ in $x'$ und $x''$ so bestimmt seyn sollen, daß sie die Gleichung (3.), nämlich

3) $$F_{x',x'',x,p',p''} = 0$$

identisch machen, so folgt aus den Elementen der Algebra (da alle diese Gleichungen keine Ableitungen enthalten), daß je 3 dieser 4 Gleichungen die 4te in sich schließen müssen, daß man also statt der 3 Gleichungen (13.) auch diese 3 nachstehenden Gleichungen nehmen kann, nämlich

14) $$F = 0; \quad f_2 = \varphi_f \quad \text{und} \quad f_3 = \psi_{f_1},$$

wo bloß noch die beiden willkührlichen Funktionen $\varphi$ und $\psi$ vorkommen. — Diese letzteren müssen nun so gewählt werden, daß auch noch den Gleichungen (2.) d. h. der Gleichung

15) $$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0,$$

in welcher $x'$ und $x''$ als ganz beliebige Funktionen von t angesehen sind, genügt werde.

Zu dem Ende verfahre man nun analog dem (§. 436.), und führe 3 neue Veränderliche ein: a, b, c mittelst der Gleichungen

16) $f_1 = a;\ f_2 = b;\ f_3 = c;$

so ergeben sich mittelst dieser Gleichungen, in Verbindung mit der Gleichung

$$F_{x;x';x'';p';p''} = 0,$$

die Veränderlichen $x'$, $x''$, $p'$ und $p''$ als Funktionen von x, a, b und c.

Denkt man sich auf diese Weise aus diesen 4 Gleichungen nicht bloß $p'$ und $p''$, sondern auch $x'$ und $x''$ in x, a, b, c ausgedrückt gefunden, nämlich

17) $x' = x'_{x,a,b,c}$ und 18) $x'' = x''_{x,a,b,c}$;

so folgt

19) $\partial x' = \partial x'_x \cdot \partial x + \partial x'_a \cdot \partial a + \partial x'_b \cdot \partial b + \partial x'_c \cdot \partial c;$

20) $\partial x'' = \partial x''_x \cdot \partial x + \partial x''_a \cdot \partial a + \partial x''_b \cdot \partial b + \partial x''_c \cdot \partial c;$

und setzt man diese Werthe in die (15.), so geht solche über in

12) $\left.\begin{array}{l}(1 - p' \cdot \partial x'_x - p'' \cdot \partial x''_x) \cdot \partial x - (p' \cdot \partial x'_a + p'' \cdot \partial x''_a) \cdot \partial a \\ - (p' \cdot \partial x'_b + p'' \cdot \partial x''_b) \cdot \partial b - (p' \cdot \partial x'_c + p'' \cdot \partial x''_c) \cdot \partial c\end{array}\right\} = 0.$

Um nun die Ableitungen $\partial x'_x$, $\partial x''_x$ zu finden (welche bekanntlich aus (16.) oder (17.) gefunden werden, indem man a, b, c konstant sich denkt), so darf man nur aus den Gleichungen (10.) die Quozienten

22) $\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial F_{p'}}{p' \cdot \partial F_{p'} + p'' \cdot \partial F_{p''}}$ und $\frac{\partial x''}{\partial x} = \frac{\partial F_{p''}}{p' \cdot \partial F_{p'} + p'' \cdot \partial F_{p''}}$

finden, und diese Quozienten statt der gesuchten $\partial x'_x$ und $\partial x''_x$ hier substituiren, weil die Gleichungen (16.), in Verbindung mit $F = 0$, sobald a, b, c als konstant angesehen werden sollen, in den 4 Gleichungen (11.) stecken, daher den Gleichungen (10.) als Integrale genügen, so daß aus den Gleichungen (10.) die Differenziale $\partial x'_x$ d. h. $\frac{\partial x'}{\partial x}$ und $\partial x''_x$ d. h. $\frac{\partial x''}{\partial x}$, unter derselben Voraussetzung, daß a, b, c konstant gedacht werden sollen (was allemal durch das Zeichen $\partial x'_x$, $\partial x''_x$ ausgesprochen ist), entnommen werden können.

Substituirt man aber diese Werthe aus (22.) in die Gleichung (21.), so fällt das mit $\partial x$ behaftete Glied, wie man aus der sehr einfachen Rechnung augenblicklich findet, ganz fort, und man erhält daher eine Gleichung von der Form

23) $$A\cdot\partial a+B\cdot\partial b+C\cdot\partial c = 0,$$

wo A, B, C Funktionen von a, b, c und x seyn werden, während genau genommen

24) $$\begin{cases} A = p'\cdot\partial x'_a+p''\cdot\partial x''_a \\ B = p'\cdot\partial x'_b+p''\cdot\partial x''_b \\ C = p'\cdot\partial x'_c+p''\cdot\partial x''_c \end{cases}$$

ist, wenn nur zur Rechten unter $p'$, $p''$, $x'$ und $x''$ die aus den 4 Gleichungen (16.) gefundenen Funktionen von a, b, c und x verstanden werden.

Soll aber diese Gleichung (23.), welche nun an die Stelle der Gleichung (15.) tritt, integrabel seyn, so muß aus ihr x selbst ganz herausfallen, also darf x nur in einem, dem A, B, C gemeinschaftlichen Faktor vorkommen. Daß dies hier aber wirklich der Fall ist, läßt sich wie folgt beweisen.

Differenziirt man nämlich die erste der Gleichungen (24.) nach allem x, so erhält man, nach bekannten Umformungen,

25) $$\partial A_{(x)} = \partial(p'\cdot\partial x'_x+p''\cdot\partial x'_x)_a+\partial p'_x\cdot\partial x'_a+\partial p''_x\cdot\partial x''_a$$
$$-(\partial p'_a\cdot\partial x'_x+\partial p''_a\cdot\partial x''_x).$$

Weil aber vermöge der Gleichungen (22.), der erste Theil zur Rechten in dieser Gleichung (25.) der Null gleich ist, so geht diese Gleichung (25.), wenn man noch statt $\partial x'_x$ und $\partial x''_x$, eben so statt $\partial p'_x$ und $\partial p''_x$, in so ferne solche beziehlich durch

$$\frac{\partial x'}{\partial x}, \quad \frac{\partial x''}{\partial x}, \quad \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial p''}{\partial x}$$

vorgestellt sind, ihre Werthe aus (10.) substituirt, auch der Kürze wegen

26) $p'\cdot\partial F_{p'}+p''\cdot\partial F_{p''}$ durch P

bezeichnet, und wenn man ferner daran denkt, daß unter den ge-

machten Voraussetzungen, wegen $F = 0$, auch noch $\partial F_{(a)} = 0$ d. h.

27) $\partial F_{x'} \cdot \partial x'_a + \partial F_{x''} \cdot \partial x''_a + \partial F_{p'} \cdot \partial p'_a + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_a = 0$

seyn muß, so daß mittelst letzterer Gleichung der Ausdruck

$$\partial F_{p'} \cdot \partial p'_a + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_a$$

eliminirt wird, — über in

28) $\partial A_{(x)} = -\partial F_x \cdot \frac{A}{P}$ oder $\frac{\partial A_{(x)}}{A} = -\frac{1}{P} \cdot \partial F_x$.

Aber ganz auf demselben Wege findet man nun auch

29) $$\frac{\partial B_{(x)}}{B} = -\frac{1}{P} \cdot \partial F_x$$

und

30) $$\frac{\partial C_{(x)}}{C} = -\frac{1}{P} \cdot \partial F_x.$$

Integrirt man nun diese 3 letztern Gleichungen, so ergiebt sich sogleich

31) $$\left.\begin{aligned} A &= C_1 \cdot e^{-\int \left(\frac{1}{P} \cdot \partial F_x\right) \cdot dx} \\ B &= C_2 \cdot e^{-\int \left(\frac{1}{P} \cdot \partial F_x\right) \cdot dx} \\ C &= C_3 \cdot e^{-\int \left(\frac{1}{P} \cdot \partial F_x\right) \cdot dx} \end{aligned}\right\},$$

wo $C_1, C_2, C_3$ nach x konstant sind, d. h. kein x mehr enthalten. Also enthalten A, B, C das x nur in dem gemeinschaftlichen Faktor

$$e^{-\int \left(\frac{1}{P} \cdot \partial F_x\right) \cdot dx},$$

und die Gleichung (23.), nämlich

$$A \cdot \partial a + B \cdot \partial b + C \cdot \partial c = 0,$$

geht daher offenbar in folgende

32) $$C_1 \cdot \partial a + C_2 \cdot \partial b + C_3 \cdot \partial c = 0$$

über, wo $C_1, C_2, C_3$ bloß a, b, c und kein x mehr enthalten werden.

Nachdem aber die Gleichung (15.) in die (32.) übergegan-

gen ist, gehen die Gleichungen (14.), welche der (15.) zu genügen haben, in diese über

33) $$F = 0; \quad b = \varphi_a \quad \text{und} \quad c = \psi_a;$$

so daß

34) $$\partial b = \partial\varphi_a \cdot \partial a \quad \text{und} \quad \partial c = \partial\psi_a \cdot \partial a$$

wird. Diese Werthe in die (32.) substituirt, müssen also die entstehende Gleichung

35) $$C_1 + C_2 \cdot \partial\varphi_a + C_3 \cdot \partial\psi_a = 0$$

zur identischen machen; und diese Gleichung (35.) bestimmt daher die Abhängigkeit, welche zwischen den Funktionen $\varphi$ und $\psi$ statt finden muß, wenn die Gleichungen (14.), nämlich

$$F = 0; \quad f_2 = \varphi_{f_1} \quad \text{und} \quad f_3 = \psi_{f_1},$$

nachdem aus ihnen $p'$ und $p''$ eliminirt sind, die gesuchte Geichung zwischen $x$, $x'$ und $x''$ so liefern soll, daß allen Forderungen der Aufgabe und der Auflösung ein Genüge geschieht. *)

## §. 439.

In dieser Form der (§§. 437. und 438.) kann man diese Methode auf Parzialgleichungen zwischen beliebig viel Veränderlichen erweitern, wie schon Jacobi **) gezeigt hat, welcher aber zuletzt noch die zu Ende des (VI. Th. d. S.) gezeigte Pfaff'sche Reduktion zu Hülfe nehmen zu müssen glaubt, während wir hier das Verfahren von letzterer unabhängig gemacht haben.

Ist nämlich

1) $$F = 0$$

eine gegebene Parzialgleichung der ersten Ordnung zwischen den $n+1$ Veränderlichen $x; x'; x''; x'''; \ldots x^{(n)}$ und den $n$ Ablei-

---

*) Wendet man aber diese Methode der (§§. 437. 438.) auf das Beispiel des (§. 436.) an, so wird man hier genau dasselbe Resultat erhalten, welches auch dort nach der Methode des Lagrange gefunden worden ist.

**) Crelle's Journal f. d. Math. II. 4. pag. 324.

tungen $\partial x_{x'}$; $\partial x_{x''}$; $\partial x_{x'''}$; ... $\partial x_{x^{(n)}}$; so führt man wieder n neue Veränderliche $p'$, $p''$, ... $p^{(n)}$ ein, mittelst der n Gleichungen;

2) $\partial x_{x'} = p'$; $\partial x_{x''} = p''$; $\partial x_{x'''} = p'''$; ... $\partial x_{x^{(n)}} = p^{(n)}$;

so daß die gegebene Gleichung (1.) nun so aussieht

3) $$F_{x;x';x'';\ldots x^{(n)};p';p'';\ldots p^{(n)}} = 0.$$

Man sucht daher jetzt n+1 Funktionen $x$; $p'$; $p''$; ... $p^{(n)}$ von den n Veränderlichen $x'$; $x''$; ... $x^{(n)}$, welche den n+1 Gleichungen (2. und 3.) genügen.

Eliminirt man zu diesem Behufe aus je zweien der n Gleichungen (2.) abermals, genau wie im (§. 437.), den Veränderlichen $x$, so erhält man eine größere Anzahl von Eliminationsgleichungen, welche alle ausgesprochen sind in dieser einzigen

4) $$\partial p^{(a)}_{x^{(b)}} = \partial p^{(b)}_{x^{(a)}};$$

indem unter a und b beliebig und unabhängig von einander entweder 1 oder 2, 3, 4, 5, ... oder n verstanden wird. Diese Gleichungen sind ganz analog der Gleichung (§. 437. N. 4.).

Differenziirt man nun wieder, wie im (§. 437.) die Gleichung (3.) oder $F_{x;x';x'';\ldots x^{(n)};p';p'';p''';\ldots p^{(n)}} = 0$ nach allem $x'$ nach allem $x''$, nach allem $x'''$, u. s. w. f.; zuletzt nach allem $x^{(n)}$, indem man nicht vergißt, daß sowohl $x$, als auch $p'$; $p''$; $p'''$; ... $p^{(n)}$ Funktionen von $x'$; $x''$; $x'''$; ... $x^{(n)}$ sind; und substituirt man in jeder dadurch entstehenden Gleichung sogleich statt $\partial p^{(a)}_{x^{(b)}}$ den ihm gleichen Werth $\partial p^{(b)}_{x^{(a)}}$ aus (4.), so erhält man die n Gleichungen

5)
$$\begin{cases} \partial F_{p'} \cdot \partial p'_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial p'_{x''} + \cdots + \partial F_{p^{(n)}} \cdot \partial p'_{x^{(n)}} = -\partial F_{x'} - p' \cdot \partial F_x; \\ \partial F_{p'} \cdot \partial p''_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_{x''} + \cdots + \partial F_{p^{(n)}} \cdot \partial p''_{x^{(n)}} = -\partial F_{x''} - p'' \cdot \partial F_x; \\ \vdots \\ \partial F_{p'} \cdot \partial p^{(n)}_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial p^{(n)}_{x''} + \cdots + \partial F_{p^{(n)}} \cdot \partial p^{(n)}_{x^{(n)}} = -\partial F_{x^{(n)}} - p^{(n)} \cdot \partial F_x; \end{cases}$$

welche ganz analog sind den Gleichungen (N. N. 7. und 8. des §. 437.).

Verbindet man mit diesen n Gleichungen (5.) die identische Gleichung

6) $\partial F_{p'} \cdot \partial x_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial x_{x''} + \cdots + \partial F_{p^{(n)}} \cdot \partial x_{x^{(n)}} = P$

(wenn der Kürze wegen

7) $p' \cdot \partial F_{p'} + p'' \cdot \partial F_{p''} + p''' \cdot \partial F_{p'''} + \cdots + p^{(n)} \cdot \partial F_{p^{(n)}}$ durch P

bezeichnet wird und) welche man erhält, wenn man die Gleichungen (2.) der Reihe nach beziehlich mit $\partial F_{p'}$; $\partial F_{p''}$; $\cdots$ $\partial F_{p^{(n)}}$ multiplizirt und die Resultate addirt; — so hat man in (5. u. 6.) n+1 lineäre Gleichungen, welche links beziehlich die Ableitungen von $p'$; $p''$; $\cdots$ $p^{(n)}$ und x mit beziehlich denselben Koeffizienten multiplizirt enthalten, und welche daher nach (§. 434.) dadurch allgemein integrirt werden, daß man die 2n Gleichungen

8) $$\frac{\partial x^{(n)}}{\partial F_{p^{(n)}}} = \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial F_{p^{(n-1)}}} = \cdots = \frac{\partial x''}{\partial F_{p''}} = \frac{\partial x'}{\partial F_{p'}}$$
$$= -\frac{\partial p'}{\partial F_{x'} + p' \cdot \partial F_x} = -\frac{\partial p''}{\partial F_{x''} + p'' \cdot \partial F_x}$$
$$= \cdots = -\frac{\partial p^{(n)}}{\partial F_{x^{(n)}} + p^{(n)} \cdot \partial F_x} = \frac{\partial x}{P'}$$

nach dem (§. 282. oder der Anmerkg. 1. zu §. 282. d. V. Th. d. S.) unter der Voraussetzung integrirt, daß

$$x^{(n)};\ \cdots;\ x'';\ x';\ p';\ p'';\ \cdots\ p^{(n)} \quad \text{und} \quad x$$

lauter Funktionen irgend eines neuen Veränderlichen t sind; — den 2n Integralgleichungen die Form giebt

9) $c_1 = f_1;\ c_2 = f_2;\ c_3 = f_3;\ \cdots\ c_{2n-1} = f_{2n-1};\ c_{2n} = f_{2n};$

(wo $c_1, c_2, c_3, \cdots c_{2n-1}, c_{2n}$ die 2n eingehenden willkührlichen Konstanten, wo $f_1, f_2, f_3, \cdots f_{2n-1}, f_{2n}$ dagegen bestimmte Funktionen der 2n+1 Veränderlichen

$$x^{(n)};\ \cdots\ x'';\ x';\ p';\ p'';\ \cdots\ p^{(n)} \quad \text{und} \quad x$$

seyn werden), zuletzt aber

10) $\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0, \cdots \Pi_{n+1} = 0$

nimmt, wo $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \cdots \Pi_{n+1}$ ganz willkührliche Funk-

tionen der 2n Veränderlichen $f_1, f_2, f_3, \cdots f_{2n}$ seyn sollen, so daß diese Integrale (10.) auch in der Form

11) $f_n = \psi;\ f_{n+1} = \psi_1;\ f_{n+2} = \psi_2; \cdots f_{2n} = \psi_n$

geschrieben werden können, wo $\psi, \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n$, n+1 ganz willkührliche Funktionen der n—1 übrigen der Veränderlichen $f_1, f_2, f_3, \cdots f_{n-1}$ vorstellen.

Hat man aber bisher ganz nach (§. 437.) verfahren, und alle Integrale (in 11.) gefunden, welche den Gleichungen (5. u. 6.) genügen, so muß man nun wieder genau nach (§. 438.) diejenigen davon heraussuchen, welche auch noch den Gleichungen (2 und 3.) zukommen. Dadurch werden sich dann wieder unter den Funktionen $\psi, \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n$ Abhängigkeiten ergeben, so daß sie nicht alle willkührlich bleiben.

Da zuförderst diese n+1 Gleichungen der (N. 11.) auch der Gleichung (3.), nämlich der $F = 0$, genügen müssen, und alle diese Gleichungen keine Ableitungen mehr enthalten, so muß in je n+1 dieser n+2 Gleichungen die n+2te mit enthalten seyn. Man kann daher von den n+1 Gleichungen (11.) die n+1ste Gleichung $f_{2n} = \psi_n$ weglassen, und dafür $F = 0$ setzen; so daß man nun statt der Gleichungen (11.) folgende hat, nämlich

12) $f_n = \psi;\ f_{n+1} = \psi_1; \cdots f_{2n-1} = \psi_{n-1}$ und $F = 0$.

Da aber auch diese Gleichungen (12.) den n Gleichungen (2.) d. h. der Gleichung

13) $\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' - p''' \cdot \partial x''' - \cdots - p^{(n)} \cdot \partial x^{(n)} = 0$

(unter der Voraussetzung daß $x'; x''; \cdots x^{(n)}$ als ganz beliebige Funktionen von t gedacht werden) zu genügen haben, so führe man wieder, um dies zu bewerkstelligen, 2n—1 neue Veränderliche $a_1, a_2, a_3, \cdots a_{2n-1}$ mittelst der 2n—1 Gleichungen

14) $a_1 = f_1;\ a_2 = f_2;\ a_3 = f_3; \cdots, a_{2n-1} = f_{2n-1}$

ein, so daß diese in Verbindung mit $F = 0$ die 2n Verän-

derlichen $x'$; $x''$; ... $x^{(n)}$; $p'$; $p''$; ... $p^{(n)}$ in

$$x,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ a_{2n-1}$$

ausgedrückt, liefern.

Gerade so wie im (§. 438.) hat man nun

15) $\partial x^{(b)} = \partial x^{(b)}_{x} \cdot \partial x + \partial x^{(b)}_{a_1} \cdot \partial a_1 + \partial x^{(b)}_{a_2} \cdot \partial a_2 + \cdots + \partial x^{(b)}_{a_{2n-1}} \cdot \partial a_{2n-1}$

für jede Zahl b, welche 1, 2, 3, ... oder n ist; und die Gleichung (13.) geht dadurch über in

17) $(1 - p' \cdot \partial x'_x - p'' \cdot \partial x''_x - \cdots - p^{(n)} \cdot \partial x^{(n)}_x) \cdot \partial x$
$+ A_1 \cdot \partial a_1 + A_2 \cdot \partial a_2 + A_3 \cdot \partial a_3 + \cdots + A_{2n-1} \cdot \partial a_{2n-1} = 0.$

Weil aber die Gleichungen (14.) in Verbindung mit $F = 0$ in den Gleichungen (9.) stecken, also Integrale der Gleichungen (8.) sind, sobald nur $a_1, a_2, a_3, \cdots a_{2n-1}$ konstant gedacht werden; so erhält man die Ableitungen $\partial x'_x$; $\partial x''_x$; ... $\partial x^{(n)}_x$, welche hier aus den Gleichungen (14.) genommen werden müßten (eben weil während des Differenziirens nach x alle die übrigen Veränderlichen als konstant angesehen werden sollen und müssen) zugleich auch aus den Gleichungen (8.) [in so ferne diese die Differenzialien der Gleichungen (9.) sind, also auch der Gleichungen (14.), unter der hier zu machenden Voraussetzung], wenn man aus letzteren die Quozienten

$$\frac{\partial x'}{\partial x};\quad \frac{\partial x''}{\partial x};\quad \frac{\partial x'''}{\partial x};\quad \cdots\quad \frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}$$

nimmt.

Substituirt man nun die Werthe dieser Quozienten statt

$$\partial x'_x;\quad \partial x''_x;\quad \partial x'''_x;\quad \cdots\ \partial x^{(n)}_x$$

in die Gleichung (17.), so fällt, wie die einfache Rechnung augenblicklich sehen läßt, das mit $\partial x$ behaftete Glied von selbst heraus, und die Gleichung (17.) hat also bloß diese einfachere Form

18) $A_1 \cdot \partial a_1 + A_2 \cdot \partial a_2 + A_3 \cdot \partial a_3 + \cdots + A_{2n-1} \cdot \partial a_{2n-1} = 0,$

in welcher $A_1, A_2, A_3, \cdots A_{2n-1}$ Funktionen von

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ a_{2n-1}$$ und noch von x,

seyn werden.

Nun beweißt man aber wieder genau wie im (§. 438.), daß der Veränderliche x nur in einem, den $A_1, A_2, A_3, \cdots A_{2n-1}$ gemeinschaftlichen Faktor vorkommt, so daß durch diesen wegdividirt und die Gleichung (18.) auf die Form

19) $C_1 \cdot \partial a_1 + C_2 \cdot \partial a_2 + C_3 \cdot \partial a_3 + \cdots + C_{2n-1} \cdot \partial a_{2n-1} = 0$

gebracht werden kann, wo $C_1, C_2, C_3, \cdots C_{2n-1}$ bloß Funktionen von $a_1, a_2, a_3, \cdots a_{2n-1}$ seyn werden, ohne x mehr zu enthalten.

Dieser Gleichung (19.), auf welche die (13.) reduzirt worden ist, soll nun durch die Gleichungen (12.), welche aber jetzt die Form

20) $a_n = \psi; \quad a_{n+1} = \psi_1; \quad a_{n+2} = \psi_2; \cdots a_{2n-1} = \psi_{n-1}$

angenommen haben, wo $\psi, \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_{n-1}$ Funktionen von $a_1, a_2, a_3, \cdots a_{n-1}$ sind, genügt werden. Weil aber diese Gleichungen (20.), wenn man sie differenziirt, sogleich

$$\partial a_{n+b} = \partial(\psi_b)_{a_1} \cdot \partial a_1 + \partial(\psi_b)_{a_2} \cdot \partial a_2 + \cdots + \partial(\psi_b)_{a_{n-1}} \cdot \partial a_{n-1}$$

liefern, für jedes b, welches 0 oder 1, 2, 3, ... n—1 ist, so kann man diese Werthe für $\partial a_n; \partial a_{n+1}; \partial a_{n+2}; \cdots \partial a_{2n-1}$ in die Gleichung (19.) subſtituiren, und man wird erhalten

$$21)\begin{cases} [C_1 + C_n\cdot\partial\psi_{a_1} + C_{n+1}\cdot\partial(\psi_1)_{a_1} + \cdots + C_{2n-1}\cdot\partial(\psi_{n-1})_{a_1}]\cdot\partial a_1 \\ +[C_2 + C_n\cdot\partial\psi_{a_2} + C_{n+1}\cdot\partial(\psi_1)_{a_2} + \cdots + C_{2n-1}\cdot\partial(\psi_{n-1})_{a}]\cdot\partial a_2 \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \quad . \\ +[C_{n-1} + C_n\cdot\partial\psi_{a_{n-1}} + C_{n+1}\cdot\partial(\psi_1)_{a_{n-1}} + \cdots + C_{2n-1}\cdot\partial(\psi_{n-1})_{a_{n-1}}]\cdot\partial a_{n-1} \end{cases} = 0,$$

wo die Koeffizienten $C_1, C_2, \cdots C_{n-1}, C_n, C_{n+1}, \cdots C_{2n-1}$, Funktionen von $a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, \psi, \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_{n-1}$ sind.

Diese Gleichung ist jedoch nicht identisch, wenn nicht, wegen der Willkührlichkeit der Ableitungen $\partial a_1, \partial a_2, \partial a_3, \cdots, \partial a_{n-1}$, jede einzelne Zeile (d. h. jeder einzelne der Koeffizienten von $\partial a_1, \partial a_2, \cdots \partial a_{n-1}$) für sich der Null gleich ist. Also hat man nun die n—1 Gleichungen, welche die Abhängigkeit zwischen den n willkührlichen Funktionen $\psi, \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_{n-1}$ aussprechen, so daß nur eine einzige derselben ganz willkührlich bleibt. *)

---

*) Für $n = 2$, reduziren sich diese n—1 Gleichungen auf die einzige

$$C_1 + C_2\cdot\partial\psi_{a_1} + C_3\cdot\partial(\psi_1)_{a_1} = 0$$

zwischen den beiden Funktionen $\psi_{a_1}$ und $(\psi_1)_{a_1}$, so daß eine einzige dieser letztern ganz willkührlich bleibt. Dies fällt aber ganz mit dem zusammen, was im (§. 436.) und im (§. 438.) für diesen Fall gelehrt worden ist.

Anmerkg. Man kann auch nicht so weit gehen, als dies hier geschehen ist, um die Abhängigkeit der Funktionen

$$\psi,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \cdots\ \psi_{n-1}$$

von einander zu bestimmen, sondern sich bloß damit begnügen, die Integrale (9.) herzustellen, um die neuen Veränderlichen

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_{2n-1}$$

zu erhalten, mittelst welcher die zu integrirende Gleichung (13.), nämlich

$$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' - \cdots - p^{(n)} \cdot \partial x^{(n)} = 0,$$

auf die Form

$$A_1 \cdot \partial a_1 + A_2 \cdot \partial a_2 + \cdots + A_{2n-1} \cdot \partial a_{2n-1} = 0$$

zu reduziren ist; nachher beweisen, daß diese jetzige Gleichung durch die Funktion

$$e^{-\int \left(\frac{1}{P} \cdot \partial F_x\right) \cdot dx}$$

wegdividirt werden und in diese andere übergehen kann, nämlich in

$$C_1 \cdot \partial a_1 + C_2 \cdot \partial a_2 + \cdots + C_{2n-1} \cdot \partial a_{2n-1} = 0,$$

wo $C_1, C_2, C_3, \cdots C_{2n-1}$ gar nicht mehr x enthalten; endlich aber, da jetzt diese letztere Gleichung an die Stelle der eigentlich zu integrirendenden Gleichung (13.) getreten ist, noch durch das Pfaff'sche Verfahren des (§. 422. d. VI. Th. d. S.) ein System von n Urgleichungen finden, welches diese letztere Gleichung identisch macht (integrirt), und welches dann eine willkührliche Funktion von n—1 bestimmten Funktionen in sich aufnimmt, so daß das Resultat doch wieder den Charakter des allgemeinen Integrals an sich trägt. — Dies ist dann das von Jacobi in der oben angeführten Abhandlung gelehrte Verfahren.

## B. Methode des Pfaff, beliebige Parzialgleichungen der ersten Ordnung allgemein und in endlicher Form zu integriren.

### §. 440.

Will man aber jenes in dem (§. 422. d. VI. Th. d. S.) be-

schriebene Pfaff'sche Verfahren in Anwendung bringen, dann ist auch die Pfaff'sche Methode, die Parzialgleichungen zu integriren, zu deren Behuf Pfaff jene Untersuchungen angestellt hat, und welche an demselben früher schon angeführten Ort *) zu finden ist, diejenige, welche sich an jene Untersuchungen am direktesten anschließt.

Um nämlich die Parzialgleichung

$$1) \qquad F = 0,$$

zwischen $x$, $x'$, $x''$ und den Ableitungen $\partial x_{x'}$ und $\partial x_{x''}$ zu integriren, setzt auch Pfaff

$$2) \qquad \partial x_{x'} = p' \quad \text{und} \quad \partial x_{x''} = p'',$$

wodurch die (1.) in folgende

$$3) \qquad F_{x;x';x'';p';p''} = 0$$

übergeht; so daß nun alle Funktionen $x$, $p'$, $p''$ von $x'$ und $x''$ gesucht werden müssen, welche den 3 Gleichungen (2. und 3.) genügen.

Nun genügt man aber der Gleichung (3.), wenn man sie nach $p''$ auflößt, so daß man

$$4) \qquad p'' = P''_{x;x';x'';p'}$$

findet. Substituirt man nun diesen Werth in die Gleichungen (2.), so wird diesen beiden Gleichungen (2.) jetzt genügt, wenn man der einzigen Gleichung

$$5) \qquad \partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

zu genügen sucht, indem $x'$ und $x''$ als ganz beliebige Funktionen von $t$ angesehen werden, während $p''$ den Werth aus (4.) vorstellt, also $x$; $x'$; $x''$ und $p'$ enthält.

Diese Gleichung (5.) kann man aber auch so schreiben, nämlich

$$6) \qquad \partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' + 0 \cdot \partial p' = 0,$$

und sie nun als eine Gleichung betrachten, zwischen $x$; $x'$; $x''$; $p'$ und den Ableitungen $\partial x$; $\partial x'$; $\partial x''$; $\partial p'$; letztere alle nach $t$ ge-

---

*) Mathemat. Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften. Berlin 1818. pag. 76.

nommen. Diese Gleichung (6.) wird dann durch das Pfaff'sche Verfahren des (§. 422.) und in's besondere des (§. 414.) auf eine Gleichung von der Form

$$7) \qquad A \cdot \partial a + B \cdot \partial b + C \cdot \partial c = 0$$

zurückgebracht, und ihr nun nach Monge durch ein System zweier Urgleichungen von der Form

$$8) \qquad f_{a,b,c} = \varphi_c \quad \text{und} \quad F_{a,b,c} = \partial\varphi_c$$

genügt, wo a, b, c bestimmte Funktionen von x; x'; x'' und p' sind, während $\varphi_c$ eine ganz willkührliche Funktion von c vorstellt.

Denkt man sich aber nun aus diesem System von 2 Urgleichungen (8.) den Unbekannten p' eliminirt, so hat man eine Urgleichung mit einer willkührlichen Funktion, welche allen Bedingungen des allgemeinen Integrals der gegebenen Parzialgleichung $F = 0$ genügt.

## §. 441.

Wäre gegeben die Parzialgleichung

$$1) \qquad F = 0$$

zwischen den 4 Veränderlichen x; x'; x''; x''' und den Ableitungen $\partial x_{x'}$; $\partial x_{x''}$; $\partial x_{x'''}$; so setze man wieder

$$2) \qquad \partial x_{x'} = p'; \quad \partial x_{x''} = p'' \quad \text{und} \quad \partial x_{x'''} = p''';$$

so daß die Gleichung (1.) in

$$3) \qquad F_{x;x';x'';x''';p';p'';p'''} = 0$$

übergeht; und nun den Gleichungen (2. und 3.) am allgemeinsten zu genügen ist.

Der Gleichung (3.) wird am allgemeinsten genügt, wenn man sie nach p''' algebraisch auflößt, also

$$4) \qquad p''' = p'''_{x;x';x'';x''';p';p''}$$

findet, und diesen Werth statt p''' in die Gleichungen (2.) substituirt.

Den dann entstehenden Gleichungen (2.) wird nun wiederum genügt, sobald der einzigen Gleichung

$$5) \quad \partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' - p''' \cdot \partial x''' = 0$$

unter der Voraussetzung ein Genüge geschieht, daß $x'$; $x''$; $x'''$ ganz beliebige Funktionen von t sind, während $p'''$ eine Funktion von $x$; $x'$; $x''$; $x'''$; $p'$ und $p''$ vorstellt.

Diese Gleichung (5.) kann man aber wieder so schreiben, nämlich

$$6) \quad \partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' - p''' \cdot \partial x''' + 0 \cdot \partial p' + 0 \cdot \partial p'' = 0,$$

und solche nun als eine Gleichung zwischen den 6 Veränderlichen $x$; $x'$; $x''$; $x'''$; $p'$ und $p''$ ansehen. Solche wird aber nach den (§. §. 417. 422. d. VI. Th. d. S.) behandelt, so daß man ein System von 3 Urgleichungen erhält, welches eine willkührliche Funktion von 2 bestimmten Funktionen in sich schließt, nnd aus welchem nur noch die beiden Unbekannten $p'$ und $p''$ eliminirt werden dürfen, um das, allen Bedingungen entsprechende allgemeine Ur-Integral der gegebenen Parzialgleichung (1.) zu haben.

## §. 442.

Soll endlich eine Parzialgleichung der 1ten Ordnung

$$1) \quad F = 0$$

zwischen den $n+1$ Veränderlichen $x$; $x'$; $x''$; .... $x^{(n)}$ und den $n$ Ableitungen $\partial x_{x'}$; $\partial x_{x''}$; ... $\partial x_{x^{(n)}}$ allgemein integrirt werden, so setze man

$$2) \quad \partial x_{x'} = p'; \quad \partial x_{x''} = p''; \quad \ldots \quad \partial x_{x^{(n)}} = p^{(n)},$$

so daß dadurch die Gleichung $F = 0$ in eine Gleichung zwischen den $2n+1$ Veränderlichen $x$; $x'$; $x''$; ... $x^{(n)}$; $p'$; $p''$; ... $p^{(n)}$ übergeht und identisch gemacht werden kann, wenn man sie nach $p^{(n)}$ algebraisch auflößt, und diesen Werth statt $p^{(n)}$ (in $x$; $x'$; $x''$; ... $x^{(n)}$; $p'$; $p''$; ... $p^{(n-1)}$ ausgedrückt) in die letzte der Gleichungen (2.) substituirt.

Den jetzigen Gleichungen (2.) wird nun noch genügt, sobald der einzigen Gleichung

$$3)\quad \left.\begin{array}{l} \partial x - p'\cdot\partial x' - p''\cdot\partial x'' - \cdots - p^{(n)}\cdot\partial x^{(n)} \\ +0\cdot\partial p' + 0\cdot\partial p'' + \cdots + 0\cdot\partial p^{(n-1)} \end{array}\right\} = 0$$

zwischen den $2n$ Veränderlichen $x;\ x';\ x'';\ \cdots x^{(n)};\ p';\ p'';\ \cdots p^{(n-1)}$ unter der Voraussetzung ein Genüge geschieht, daß $x';\ x'';\ x''';\ \cdots x^{(n)}$ als ganz beliebige Funktionen von t gedacht werden.

Dieser einzigen Gleichung (3.) genügt man aber genau unter den vorhandenen Bedingungen durch dasjenige der nach (§. 422. d. VI. Th. d. S.) zu erhaltenden Systeme von n Urgleichungen, welches eine willkührliche Funktion von $n-1$ bestimmten Funktionen in sich aufnimmt, wenn man sich nur aus diesen n Urgleichungen die $n-1$ Unbekannten $p';\ p'';\ p''';\ \cdots p^{(n-1)}$ eliminirt denkt, so daß, wenn die Elimination ausgeführt werden könnte, man eine einzige Urgleichung zwischen $x;\ x';\ x'';\ \cdots x^{(n)}$ haben würde, welche allen Bedingungen genügt, denen das allgemeine Integral der gegebenen Parzialgleichung $F = 0$ zu genügen hat.

Anmerkg. 1. Genügt man dieser Gleichung (3.) durch irgend ein anderes der Systeme von n Urgleichungen, welche nach (§. 422. d. VI. Th. d. S.) gefunden werden, so erhält man offenbar wieder Integrale der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$, nur nicht das allgemeinste.

Anmerkg. 2. Die Rechnungen des (§. 422. d. VI. Th. d. S.), welche dabei durchzuführen sind, vereinfachen sich noch deshalb, weil hier ein großer Theil der Koeffizienten der Gleichung (3.) einander und der Null gleich sind.

## C. Die Methode des Charpit. Dieselbe weiter durchgeführt.

### §. 443.

Als Lagrange den hier im (§. 435.) vorgetragenen Theil seiner Methode bekannt gemacht, aber die im (§. 436.) hier zu findende Vervollständigung derselben noch nicht hinzugefügt hatte,

schlug Charpit, wie wir bereits in der Note zu (§. 436.) bemerkt haben, vor, sich mittelst der Methode des (§. 435.) bloß besondere, aber vollständige Integrale zu verschaffen, und zuletzt von diesen, auf dem ebenfalls von Lagrange gegebenen Wege, zu den allgemeinen Integralen sich zu erheben.

Nach dieser Methode des (§. 435.) erhält man aber alle Integrale der gegebenen Parzialgleichung

1) $$F_{x;x';x'';\partial x_{x'};\partial x_{x''}} = 0,$$

wenn man

2) $$\partial x_{x'} = p' \quad \text{und} \quad \partial x_{x''} = p''$$

setzt; der so transformirten Gleichung (1.), nämlich der Gleichung

3) $$F_{x;x';x'';p';p''} = 0$$

dadurch genügt, daß man $p''$ in $x; x'; x''$ und $p'$ ausgedrückt findet; hernach, während man sich unter $p''$ überall diese Funktion von $x, x', x''$ und $p'$ vorgestellt denkt, wiederum $p'$ als Funktion von $x, x'$ und $x''$ so nimmt, daß die Gleichung

4) $$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

integrabel wird, also daß der Bedingungsgleichung ihrer Integrabilität, die jedoch diese Form annehmen kann,

5) $$\partial F_{p''} \cdot \partial p'_{x''} + \partial F_{p'} \cdot \partial p'_{x'} + (p'' \cdot \partial F_{p''} + p' \cdot \partial F_{p'}) \cdot \partial p'_{x} = -(\partial F_{x'} + p' \cdot \partial F_{x})$$

genügt wird; zuletzt aber für diese aus (3. und 5.) hervorgehenden Werthe von $p'$ und $p''$ (in $x$, $x'$ und $x''$ ausgedrückt) die Gleichung (4.) wirklich integrirt.

Weil aber die Gleichung (5.) in Bezug auf $p'$ eine lineäre Parzialgleichung ist zwischen den 4 Veränderlichen $p'$, $x$, $x'$ und $x''$, so werden aus ihr wiederum alle Werthe von $p'$ gefunden (nach §. 429.), wenn man die 3 totalen Gleichungen

6) $$\frac{\partial x''}{\partial F_{p''}} = \frac{\partial x'}{\partial F_{p'}} = \frac{\partial x}{p'' \cdot \partial F_{p''} + p' \cdot \partial F_{p'}} = -\frac{\partial p'}{\partial F_{x'} + p' \cdot \partial F_{x}}$$

nach (§. 282. d. V. Th. d. S.) integrirt, die 3 Integralgleichungen auf die Form

7) $c_1 = P$; $c_2 = Q$ und $c_3 = R$

bringt (wo $c_1, c_2, c_3$ die 3 durch diese Integration eingehenden willkührlichen Konstanten sind, wo aber P, Q, R Funktionen von $x, x', x''$ und $p'$ vorstellen); und dann zuletzt

8) $R = \psi_{P,Q}$ oder 9) $Q = \psi_{P,R}$ oder 10) $P = \psi_{Q,R}$

nimmt, jedesmal aber unter $\psi$ eine ganz willkührliche Funktion (der unten angehängten Ausdrücke) versteht.

I. So wie man jedoch bloß ein besonderes aber vollständiges Integral der Parzialgleichung (1.) haben will, so braucht man in den Gleichungen (8. 9. oder 10.) statt $\psi$ bloß eine willkührliche Konstante zu nehmen, also z. B. irgend eine der Gleichungen (7.) statt einer der Gleichungen (8. 9. oder 10.) zu setzen.

II. Und weil jedes Integral von einer der in (6.) stehenden 6 Gleichungen, oder jedes Integral einer aus diesen 6 Gleichungen durch irgend eine Kombination entstandenen (totalen) Differenzialgleichung der ersten Ordnung, mit einer willkührlichen Konstante, welches jedoch noch $p'$ enthalten muß, statt einer der 3 Gleichungen (7.) gesetzt werden kann: so wird man auch ein besonderes aber vollständiges Integral der gegebenen Parzialgleichung (1.) dann schon erhalten, wenn man irgend eine der 6 Gleichungen in (6.), oder irgend eine Gleichung, welche aus diesen 6 Gleichungen durch irgend eine algebraische Kombination hervorgegangen, wenn sie integrabel seyn sollte, allgemein integrirt (nachdem vorher statt $p''$ sein aus

$$F_{x;x';x'';p';p''} = 0$$

gefundener Werth, in $x$; $x'$; $x''$ und $p'$ ausgedrückt, substituirt worden ist); aus diesem Integral $p'$ findet, hernach $p''$ dazu bestimmt (bloß in $x$, $x'$ und $x''$ ausgedrückt), diese Werthe in die Gleichung (4.) oder

$$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0,$$

statt $p'$ und $p''$ substituirt (wodurch diese letztere nothwendig integrabel wird), und letztere dann allgemein integrirt.

III. Gelingt es aber nicht, auf dem Wege (II.) eine integrable Gleichung zu erhalten, so kann man doch vielleicht zwei der Gleichungen (6.) nach dem (§. 282. d. V. Th. d. S.) integriren, ohne die dritte zur Hülfe nehmen zu müssen, und dann durch Elimination einer der 2 eingehenden willkührlichen Konstanten, sich eine der Gleichungen (7.) verschaffen, aus welcher dann, in Verbindung mit der Gleichung (3.), sowohl $p'$ als auch $p''$ so (in $x$, $x'$, $x''$ und eine willkührliche Konstante ausgedrückt) gefunden werden kann, daß die Gleichung (4.), nämlich

$$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

für diese Werthe von $p'$ und $p''$ integrabel wird, und, integrirt, das gesuchte vollständige Integral der gegebenen Parzialgleichung (1.) liefert.

Beispiel 1. Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$\partial x_{x''} - (x' \cdot \partial x_{x'} + x)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad p'' = (p' \cdot x' + x)^2,$$

so werden die 3 Gleichungen (6.) jetzt

$$\begin{aligned} \partial x' + 2x' \cdot (p' \cdot x' + x) \cdot \partial x'' &= 0; \\ \partial x + (p' \cdot x' - x) \cdot (p' \cdot x' + x) \cdot \partial x'' &= 0; \\ \partial p' - 4p' \cdot (p' \cdot x' + x) \cdot \partial x'' &= 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man aber aus der erstern und letztern derselben den Ausdruck $p' \cdot x' + x$, so erhält man

$$2p' \cdot \partial x' + x' \cdot \partial p' = 0 \quad \text{oder} \quad 2\frac{\partial x'}{x'} + \frac{\partial p'}{p'} = 0;$$

und diese Gleichung, integrirt, giebt sogleich

$$p' \cdot x'^2 = a \quad \text{oder} \quad p' = \frac{a}{x'^2}.$$

Setzt man nun diesen Werth statt $p'$ und den zugehörigen statt $p''$ in die Gleichung

$$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0,$$

so geht solche über in

$$\partial x - \left(\frac{a}{x'} + x\right) \cdot \partial x'' - \frac{a}{x'^2} \cdot \partial x' = 0.$$

Sie ist integrabel, und sie giebt, wenn sie integrirt wird,

$$x + \frac{a}{x'} + \frac{1}{x'' + b} = 0 \quad \text{oder} \quad (x \cdot x' + a) \cdot (x'' + b) + x' = 0.$$

Dies ist also das vollständige Integral der gegebenen Parzialgleichung.

Anmerkung. Ist gegeben die Parzialgleichung

1) $x^2 \cdot (1 + \partial x_x'^2 + \partial x_x''^2) = r^2$ oder $x^2 \cdot (1 + p'^2 + p''^2) = r^2$,

so werden die 3 Gleichungen (6. des §. 443.) für sie folgende:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p'' \cdot \partial x' - p' \cdot \partial x'' = 0 \\ p'' \cdot \partial x - (p'^2 + p''^2) \cdot \partial x'' = 0 \\ x \cdot p'' \cdot \partial p' + p' \cdot (1 + p'^2 + p''^2) \cdot \partial x'' = 0. \end{array} \right\}$$

Die letztere dieser Gleichungen wird vermöge der 2ten derselben übergehen in

$$x \cdot p'' \cdot \partial p' + p' \cdot \partial x'' + p' \cdot p'' \cdot \partial x = 0$$

oder

$$3) \quad x \cdot \partial p' + p' \cdot \partial x + \partial x' = 0;$$

und diese, integrirt, giebt

$$4) \quad p' \cdot x + x' = a.$$

Statt aber nun aus dieser Gleichung und aus der gegebenen Parzialgleichung $p'$ und $p''$ zu finden, diese Werthe in die Gleichung

$$5) \quad \partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

zu substituiren, und dann diese, welche nothwendig integrabel ist, zu integriren, kann man hier lieber die gegebene Parzialgleichung in der Form

$$x^2 \cdot (1 + p'^2 + p''^2) = r^2$$

differenziiren, so daß man erhält

$$6) \quad (1 + p'^2 + p''^2) \cdot \partial x + x \cdot p' \cdot \partial p' + x \cdot p'' \cdot \partial p'' = 0;$$

davon die mit $p'$ multiplizirte (3.) subtrahiren, statt $\partial x - p' \cdot \partial x'$ aus (5.) den Werth $p'' \cdot \partial x''$ substituiren; und man erhält

$$7) \quad x \cdot \partial p'' + p'' \cdot \partial x + \partial x'' = 0;$$

welche, integrirt,

$$8) \quad p'' \cdot x + x'' = b$$

liefert. Findet man nun aus (4. und 8.) sowohl $p'$ als $p''$, und setzt man diese Werthe in die gegebene (1.), so erhält man

$$9) \quad x^2 + (a - x'^2) + (b - x''^2) = r^2;$$

welches das besondere, aber vollständige Integral der (1.) ist.

Der Grund davon fällt dabei leicht in die Augen.

## §. 444.

I. Hat man aber auf dem allemal gangbaren Wege des (§. 443.) ein besonderes, jedoch vollständiges Integral gefunden, so kann man daraus allemal sogleich das allgemeine Integral ableiten, indem man die im (V. Th. d. S. §. 287. oder §. 288. V. oder Anmerkg. 1. zu §. 288.) mitgetheilten Methoden in Anwendung bringt.

Versucht man dies für die Parzialgleichung

1) $$x - \partial x_{x'} \cdot \partial x_{x''} = 0,$$

deren besonderes, aber vollständiges Integral

2) $$x = (x' + a) \cdot (x'' + b)$$

auf dem vorbeschriebenen Wege leicht gefunden wird, wo a und b die beiden willkührlichen Konstanten sind; und wählt man dazu den Weg (§. 287. d. V. Th. d. S.), so wird man folgende Rechnungen zu machen haben.

Zuerst setzt man in (2.) $a = 0$ und $\varphi_\omega$ statt b, um die Form des allgemeinen Integrals zu erhalten, nämlich

3) $$x = x' \cdot (x'' + \varphi_\omega).$$

Hernach sucht man noch $\omega$ dazu, indem man diese Gleichung (3.) nach allem $x'$ und nach allem $x''$ differenziirt, daraus

4) $\partial x_{x'} = \dfrac{x + x'^2 \cdot \partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_{x'}}{x' \cdot (1 - x' \cdot \partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_x)}$ und 5) $\partial x_{x''} = \dfrac{x' \cdot (1 + \partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_{x''})}{1 - x' \cdot \partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_x}$

findet, diese Werthe in die gegebene Parzialgleichung (1.) substituirt, und dann die Koeffizienten von $\partial\varphi_\omega$, $\partial\varphi_\omega^2$ einzeln der Null gleich setzt. Zur Bestimmung von $\omega$ bekommt man dann die beiden Gleichungen

6) $$\left.\begin{array}{r} 2x' \cdot x \cdot \partial\omega_x + x'^2 \cdot \partial\omega_{x'} + x \cdot \partial\omega_{x''} = 0 \\ x \cdot \partial\omega_x^2 \quad - \quad \partial\omega_{x'} \cdot \partial\omega_{x''} = 0 \end{array}\right\},$$

welchen durch den gesuchten Werth von $\omega$ genügt werden muß. — Eliminirt man aber aus diesen beiden Gleichungen abwechselnd $\partial\omega_{x'}$ und $\partial\omega_{x''}$; so erhält man an ihrer Stelle die folgenden beiden

7) $$\left.\begin{array}{l} x \cdot \partial\omega_x + x' \cdot \partial\omega_{x'} + 0 \cdot \partial\omega_{x''} = 0 \\ x' \cdot \partial\omega_x + 0 \cdot \partial\omega_{x'} + 1 \cdot \partial\omega_{x''} = 0 \end{array}\right\}$$

Integrirt man jede dieser beiden lineären Parzialgleichungen nach (§. 430.), so erhält man

für die erste $\omega = \psi_{x'';\, x:x'}$ oder $\omega = \psi_{x'';\, \frac{x}{x'}-x''}$

für die andere $\omega = \psi'_{x';\, x-x'\cdot x''}$ oder $\omega = \psi'_{x';\, \frac{x}{x'}-x''}$.

Da nun der Werth von $\omega$ beiden Gleichungen (7.) genügen muß, so muß er in jeder dieser beiden allgemeinen Formen

$$\psi_{x'';\, \frac{x}{x'}-x''} \quad \text{und} \quad \psi'_{x';\, \frac{x}{x'}-x''}$$

stekken. Weil aber eine Zusammensetzung aus $\frac{x}{x'}-x''$ und $x''$, nie zu gleicher Zeit eine Zusammensetzung von demselben $\frac{x}{x'}-x''$ und $x'$ seyn kann, so folgt daraus, daß dasmal ein solcher Werth von $\omega$ gar nicht existirt, daß also ein endliches allgemeines Integral in allgebraischer Form gar nicht existirt. *)

II. In solchen Fällen, wo man bereits ein besonderes aber vollständiges Integral gefunden, und zu gleicher Zeit sich überzeugt hat, daß ein endliches allgemeines Integral in algebraischer Form **) nicht existirt, muß man die Betrachtung der (§. 288. V. zu Anfange, oder die der Anmerkung 1. zu §. 288. d. V. Th. d. S.) eintreten lassen. Wenn nämlich von einer Parzialgleichung

$$1) \qquad F_{x;\, x';\, x'';\, \partial x_{x'};\, \partial x_{x''}} = 0$$

der ersten Ordnung, das besondere aber vollständige Integral

---

*) Dasselbe Resultat hätte man erhalten, wenn man das allgemeine Integral nach der Methode des (§. 288. V. d. V. Th. d. S.) hätte finden wollen. Man hätte $\omega$ gefunden; aber das Endresultat $x = x' \cdot (x'' + \varphi_\omega)$ hätte der Parzialgleichung nicht genügt.

**) Es braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden, daß „algebraische Form" hier allemal der Differenzial- oder Integral-Form gegenüber steht; also das bedeutet, was in den Elementen algebraisch oder transcendent genannt wird.

Statt hier zu sagen „algebraische Form" wäre es besser, aber nicht gebräuchlich, „Ur-Form" zu setzen.

2) $$V_{x;x';x'';a,b} = 0$$

mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b bereits gefunden ist, so liefert das System der beiden Gleichungen

3) $$\left\{\begin{matrix} V_{x;x';x'';a_\omega;b_\omega} = 0 \\ \partial V_a \cdot \partial a_\omega + \partial V_b \cdot \partial b_\omega = 0 \end{matrix}\right\}$$

durch Elimination von $\omega$, für alle anders und anders angenommenen Funktionen $a_\omega$, $b_\omega$ von $\omega$, welche statt a und b gesetzt werden, jedesmal ein neues Integral der gegebenen Parzialgleichung. — Oder das System der beiden Gleichungen

4) $$\left\{\begin{matrix} V_{x;x';x'';a;b_a} = 0 \\ \partial V_a + \partial V_b \cdot \partial b_a = 0 \end{matrix}\right\}$$

liefert für jede immer anders und anders angenommene Funktion $b_a$ von a, welche statt b gesetzt wird, durch Elimination von a jedesmal ein neues Integral der gegebenen Parzialgleichung.

Denn da $V_{x;x';x'';a;b} = 0$ ein Integral von $F = 0$ ist, so erhält man $F = 0$, sobald man aus $V = 0$; $\partial V_{(x')} = 0$ und $\partial V_{(x'')} = 0$ die Konstanten a und b eliminirt; also genügt dasselbe $V_{x;x';x'';a;b} = 0$ auch dann noch der Parzialgleichung $F = 0$, wenn auch a und b als Funktionen von $x'$, $x''$ gedacht werden, nur so, daß $\partial V_{(x')}$ und $\partial V_{(x'')}$ dieselben bleiben, wie wenn a und b konstant wären. — Dies letztere ist aber der Fall, sobald in dem System (3.) oder in dem System (4.) zu der ersten noch die 2te Gleichung zugelassen wird.

Eines dieser Systeme von Gleichungen (3.) oder (4.), weil aus ihm ebenfalls ohne Ende fort neue und neue besondere Integrale hervorgehen, indem man in dem Systeme (3.) die Funktionen $a_\omega$, $b_\omega$ oder in dem anderen Systeme (4.) die Funktion $b_a$ immer anders und anders partikularisirt, um nachgehends $\omega$ oder a eliminiren zu können, pflegt man nun, in Ermangelung einer endlichen algebraischen Form, als das endliche und allgemeine Integral der $F = 0$ anzusehen: und das ist in so ferne erlaubt, als wir in der (Anmerkung 1. zu §. 288. d. V. Th. d. S.) gezeigt haben, wie das allgemeine Integral in (allge-

braischer und) endlicher Form in jedem dieser hier hingestellten Systeme (3.) oder (4.) allemal enthalten ist, so oft ein solches existirt. — Im entgegengesetzten Falle hat man also wenigstens einen Stellvertreter desselben.

Nach diesem Verfahren gelangt man von dem besondern aber vollständigen Integral

1) $x=(x'+a)(x''+b)$ der Parzialgleichung 2) $x-\partial x_{x'}\cdot\partial x_{x''}=0$,

sogleich zu dem allgemeinen Integral

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{matrix} x=(x'+\varphi_b)(x''+b) \\ 0=\partial\varphi_b\cdot(x''+b)+x'+\varphi_b \end{matrix}\right\}$$

indem man unter $\varphi_b$ eine ganz willkührliche Funktion von b, und dann aus dem System der beiden Gleichungen, b selbst eliminirt sich denkt.

Durch das Verfahren der (§. §. 435. 436.) haben wir in dem Beispiel zu (§. 436.) für dieselbe Parzialgleichung das System der beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{matrix} \frac{x}{p'}-x'=f_P \\ \frac{x}{p'^2}=\partial f_P \end{matrix}\right\},\ \text{wo}\ P=x''-p'\ \text{ist},$$

gefunden, aus welchem $p'$ eliminirt werden muß, um das allgemeine Integral zu haben. Setzt man aber $x''-p'=b$; also $p'=x''-b$; so wird das vorliegende System zweier Gleichungen in folgendes

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{matrix} \frac{x}{x''-b}-x'=f_b \\ 0=\frac{x}{(x''-b)^2}-\partial f_b \end{matrix}\right\},$$

übergehen, aus welchen letzteren beiden Gleichungen nun b eliminirt werden muß; während die zweite dieser Gleichungen auch nichts anders ist, als die Ableitung der erstern nach allem b.

Dieses zuletzt gefundene System (II.) stimmt also mit dem hier gefundenen System (I.) vollkommen überein; wie man überdieß auch noch sieht, wenn man hier noch $-b$ statt b schreibt, und $f_{(-b)}$ durch $\varphi_b$ bezeichnet

Anmerkung. Poisson hat bewiesen, daß man jedesmal nothwendig zu einem und demselben Integral gelangen müsse, man mag solches nach den (§. §. 435. 436.) direkt, oder wie hier

in dem (§. 443.) nach Charpit gelehrt worden ist, dadurch finden, daß man zuerst ein besonderes aber vollständiges Integral aufsucht, und von diesem dann nach (§. 443. II.) zu dem allgemeinen Integral übergeht. (Vergl. Bulletin des sciences, année 1815. p. 183. und Correspondance sur l'École Polytechnique T. III. p. 291; so wie Lacroix traité. T. III. Addit. zu Nro. 747.). — Nach unsern Ansichten hier versteht sich solches von selbst, sobald man nur jedesmal überzeugt ist, auch wirklich das allgemeine Integral zu haben.

## §. 445.

Da es bei der Durchführung der Methode des Charpit besonders vortheilhaft ist, wenn man sich nicht gezwungen sieht, alle 3 Gleichungen (§. 443. Nr. 6.) zu integriren, sondern wenn man nach (§. 443. II.) oder doch nach (§. 443. III.) verfahren, und nur ein einziges Integral, oder doch nur zwei Integrale der Gleichungen (§. 443. Nr. 6.) sich zu verschaffen braucht, so wollen wir hier noch einige Fälle besonders betrachten. — Zuvörderst aber wollen wir die 4 gleichen Ausdrücke in (Nr. 6. des §. 443.), nämlich

$$1)\quad \frac{\partial x''}{\partial F_{p''}} = \frac{\partial x'}{\partial F_{p'}} = \frac{\partial x}{p''\cdot\partial F_{p''} + p'\cdot\partial F_{p'}} = -\frac{\partial p'}{\partial F_{x'} + p'\cdot\partial F_{x}}$$

beziehlich durch

$$= A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D$$

bezeichnen, so wie die 6 Gleichungen, welche darin stecken, beziehlich durch

2) (A,D) , (B,D) , (C,D) , (A,C) , (B,C) und (A,B).

Soll nun, wie dies bei der Behandlung nach (§. 443. II.) gewünscht wird, eine dieser 6 Gleichungen (2.) an sich integrabel seyn, so ist dies offenbar nur dann der Fall, wenn sie keine andern der 4 Veränderlichen x, x', x'' und p' enthält, als die, deren Ableitungen in ihr vorkommen. Und weil sie zu gleicher Zeit p' enthalten muß, so kann es unserem gegenwärtigen Zweck nur dann förderlich seyn, wenn eine der 3 Gleichungen

(A,D) , (B,D) oder (C,D)

an sich integrabel ist.

I. Setzen wir nun den Fall voraus, daß die Gleichung (A,D) an sich integrabel sey. — Dies ist offenbar nur dann der Fall, wenn der Quozient

3) $\frac{\partial F_{x'} + p' \cdot \partial F_x}{\partial F_{p''}}$ einer bloßen Funktion $f_{x''; p'}$ von $x''$ und $p'$

gleich ist. — Fragen wir uns aber ferner: wie muß $p''$ in $x$, $x'$, $x''$ und $p'$ gegeben seyn, d. h. wie muß die gegebene Parzialgleichung beschaffen seyn, damit dieses Ereigniß (3.) eintrete, so weiß man zunächst soviel, daß diese gesuchte Funktion $p''$ die Gleichung $F_{x; x'; x''; p'; p''} = 0$ identisch machen müsse, also auch die Ableitungen dieser letztern Gleichung nach allem $x$, nach allem $x'$, nach allem $x''$ und nach allem $p'$, d. h. namentlich die Gleichungen

4) $\partial F_{x'} + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_{x'} = 0$ und $\partial F_x + \partial F_{p''} \cdot \partial p''_x = 0$

identisch machen müsse. Also kann man aus der Gleichung (3.) und den beiden Gleichungen (4.) die Ausdrücke $\partial F_{x'}$ und $\partial F_x$ eliminiren; $\partial F_{p''}$ fällt dadurch von selbst heraus: diese Gleichung (3.) geht dann über in

5) $$\partial p''_{x'} + p' \cdot \partial p''_x + 0 \cdot \partial p''_{x''} + 0 \cdot \partial p''_{p'} = f_{x''; p'},$$

und diese Gleichung dient nun zur Bestimmung von $p''$, d. h. zur Bestimmung der Parzialgleichung $F = 0$, für welche die Integrabilität der Gleichung (A,D) allemal statt findet.

Integrirt man aber diese lineäre Parzialgleichung (5.) zwischen den 5 Veränderlichen $p''$ und $p'$, $x''$, $x'$, $x$ nach (§. 431.), so erhält man zum allgemeinen Integral

6) $$p'' - x' \cdot f_{x''; p'} = \varphi_{p'; x''; x - p' \cdot x'};$$

wo $\varphi$ eine ganz willkührliche Funktion von $p'$, $x''$ und $x - p' \cdot x'$ vorstellt, während auch $f$ eine willkührlich gegebene Funktion von $x''$ und $p'$ ist.

Hat also die gegebene Parzialgleichung, nachdem beziehlich $p'$ und $p''$ statt $\partial x_{x'}$ und $\partial x_{x''}$ gesetzt worden sind, die Form (6.), so wird die Gleichung (A,D) allemal die Form

7) $$\partial p' + f_{x'';p'} \cdot \partial x'' = 0$$

annehmen, integrirt werden können, und ein Integral von der Form

8) $\psi_{p';x''} = 0$ oder $p' = \pi_{x''}$ oder $x'' = \chi_{p'}$

mit einer willkührlichen Konstante liefern.

Ist aber statt $F = 0$ die Gleichung (6.) gegeben, so geht die Gleichung

9) $$\partial x - p' \cdot \partial x'' - p'' \cdot \partial x'' = 0,$$

wenn man statt $p''$ und $p'$ beziehlich ihre Werthe aus (6.) und (8.) subſtituirt, sogleich in folgende über

10) $\partial x - \partial(\pi \cdot x') - \varphi_{\pi;x'';x-\pi \cdot x'} \cdot \partial x'' = 0;$

sie ist nothwendig integrabel; und sie giebt, wenn man sie nach (§. §. 396. 402.) integrirt, sogleich

11) $$x - \pi \cdot x' = C,$$

wo C gegeben ist durch die Gleichung

12) $$\partial C = \varphi_{\pi;x'';C} \cdot \partial x'',$$

welche als eine Gleichung zwischen den zwei Veränderlichen C und (allem) $x''$ integrirt werden muß.

Das Integral (11.) enthält demnach zwei willkührliche Konstanten (die eine in $\pi$, die andere in C) und ist daher nach (§. 443.) das vollständige Integral der gegebenen Parzialgleichung (6.).

Nimmt man noch specieller die gegebene Parzialgleichung (6.) bloß von der Form

$$p'' = \varphi_{p';x'';x-p' \cdot x'};$$

so daß

$$f_{p';x''} = 0$$

genommen wird, so giebt die Gleichung (7.) sogleich $p' = \pi = a$, und die Gleichung (12.) wird dann

$$\partial C = \varphi_{a,x'',C} \cdot \partial x''.$$

Und enthält noch überdies die Funktion $\varphi$ gar nicht $x - p' \cdot x'$, so enthält die Gleichung (12.) auch nicht C; solche giebt daher sogleich

$$C = \int \varphi_{a,x''} \cdot dx'' + b,$$

so daß die Gleichung (11.) wird

$$x = a \cdot x' + \int \varphi_{a,x''} \cdot dx'' + b,$$

welche ein vollständiges Integral der jetzt gegebenen Parzialgleichung

$$p'' = \varphi_{p';x''}$$

ist.

Wird dann hier $b = \psi_a$ geschrieben, so liefert das System der beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{matrix} x = a \cdot x' + \int \varphi_{a,x''} \cdot dx'' + \psi_a \\ 0 = x' + \int \partial\varphi_a \cdot dx'' + \partial\psi_a \end{matrix}\right\}$$

das gesuchte allgemeine Integral der Parzialgleichung $p'' = \varphi_{p';x''}$ nach (§. 444.).

Ist endlich bloß gegeben

$$p'' = \varphi_{p'},$$

so gehen diese Integralgleichungen über in

$$\left\{\begin{matrix} x = a \cdot x' + x'' \cdot \varphi_a + \psi_a \\ 0 = x' + x'' \cdot \partial\varphi_a + \partial\psi_a \end{matrix}\right\},$$

aus denen zuletzt a eliminirt gedacht werden muß (nach §. 444. II.).

Vertauscht man in dem vorhergehenden $p'$ und $p''$ mit einander, so erhält man offenbar ein analoges Resultat.

II. Wird nun die andere Gleichung (B,D) integrabel gedacht, so ist dies offenbar nur dann der Fall, wenn

1) $\dfrac{\partial F_{x'} + p' \cdot \partial F_x}{\partial F_{p'}}$ bloß einer Funktion $f_{p';x'}$ von $p'$ und $x'$ gleich ist. Die Gleichung (B,D) wird dann

2) $$\partial p' + f_{p';x'} \cdot \partial x' = 0,$$

ist integrabel, und giebt, wenn sie integrirt wird, ein Integral, welches durch

3) $T_{p';x'} = b$ oder $p' = \pi_{x';b}$ vorgestellt seyn mag. — Frägt man sich aber wieder, welche Funktion von $x$, $x'$, $x''$ und $p''$ unter $p'$ gedacht werden muß, damit dies Ereigniß (I.) eintrete; so findet man ganz auf demselben Wege, wie in (I.) zur Bestimmung dieser Funktion $p'$ die Parzialgleichung

4) $\partial p'_{x'} + p' \cdot \partial p'_{x} + 0 \cdot \partial p'_{x''} + 0 \cdot \partial p'_{p''} + f_{p';x'} = 0.$

Wird nun diese nach (§. 431.) integrirt, so erhält man zunächst die totalen Gleichungen

$$\frac{\partial x'}{1} = \frac{\partial x}{p'} = \frac{\partial x''}{0} = \frac{\partial p''}{0} = -\frac{\partial p'}{f_{p';x'}};$$

dann deren Integrale

$x'' = a$; $p'' = c$; $T_{p';x'} = b$ und $x - \int \pi \cdot dx' = e$;

und hieraus das allgemeine Integral

5) $\psi_{x'';p'';T;x-\int \pi \cdot dx'} = 0$ oder $p'' = \varphi_{x'';T;x-\int \pi \cdot dx'}$

wo in $\int \pi \cdot dx'$ nach der Integration statt b die Funktion T gesetzt werden muß, ganz dem Verlangen des (§. 431.) gemäß.

Hat also die gegebene Parzialgleichung die Form (5.), wo T eine ganz beliebig gegebene Funktion von $p'$ und $x'$ ist, weil $f_{p';x'}$ und $T_{p';x'}$ bloß von einander abhängen, so ist die Gleichung (B,D) integrabel, und giebt zum Integral die Gleichung (3.). — Substituirt man aber die aus (5. und 3.) gezogenen Werthe von $p'$ und $p''$ in die Gleichung

6) $\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0,$

so geht solche über, wenn man der größern Einfachheit wegen

7) $x - \int \pi \cdot dx' = \nu$, also $\partial x - \pi \cdot \partial x' = \partial \nu$

setzt, in

8) $\partial \nu = \varphi_{x'';b;\nu} \cdot \partial x''.$

Wird also diese Gleichung (8.) als eine Differenzialgleichung, zwischen den beiden Veränderlichen $x''$ und $\nu$, integrirt, dann aber statt $\nu$ sein Werth aus (7.) substituirt, so hat man das vollständige Integral der gegebenen Parzialgleichung (5.).

Daß man analoge Resultate erhält, sobald $p'$ und $p''$ mit einander vertauscht werden, fällt dabei von selbst in die Augen.

III. Setzt man endlich voraus, daß die Gleichung (C,D) integrabel ist, so setzt man voraus, daß

1) $\frac{p''\cdot\partial F_{p''}+p'\cdot\partial F_{p'}}{\partial F_{x'}+p'\cdot\partial F_{x}}$ einer Funktion $f_{x,p'}$ bloß von x und $p'$ gleich sey, so daß die Gleichung (C,D) die Form

2) $$\partial p'-f_{x,p'}\cdot\partial x = 0,$$

und ihr Integral die Form

3) $$T_{x,p'} = c \quad \text{oder} \quad p' = \pi_{x,c}$$

annimmt.

Damit aber dies sich ereigne, muß die gegebene Parzialgleichung die Form haben

4) $$p'' = p'\cdot\varphi_{x'';x'-\int\frac{1}{\pi}\cdot dx;T'}$$

wo T, so wie f, da beide bloß von einander abhängig sind, eine beliebig gegebene Funktion von $p'$ und x vorstellt, während $\pi$ den Werth von $p'$ repräsentirt, wie solcher aus $T = 0$ hervorgeht, wo endlich $\int\frac{1}{\pi}\cdot dx$ das vorstellt, was hervorgeht, wenn nach geschehener Integration (nach x) noch T statt c gesetzt wird; wie alles dieses augenblicklich gefunden wird, wenn man ganz analog nach (I.) verfährt, und die zur Bestimmung von $p'$ oder $p''$ hervorgehende lineäre Parzialgleichung zwischen 5 Veränderlichen genau nach (§. 431.) integrirt.

Hat aber die gegebene Parzialgleichung $F = 0$ diese Form (4.), so ist die Gleichung (3.) das Integral der Gleichung (C,D). Findet man daher aus (4. und 3.) sowohl $p'$, als auch $p''$, und substituirt man diese Werthe in die Gleichung

5) $$\partial x-p'\cdot\partial x'-p''\cdot\partial x'' = 0,$$

so geht letztere, wenn man noch der Kürze wegen,

6) $$x' - \int \frac{1}{\pi} \cdot dx = \nu$$

setzt, sogleich in folgende

7) $$\varphi_{x'',\nu,c} \cdot \partial x'' + \partial \nu = 0$$

über. Diese wird nun, als eine Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen $x''$ und $\nu$ integrirt; und wenn zuletzt statt $\nu$ wieder ihr Werth aus (6.) gesetzt wird, so hat man sogleich das vollständige Integral der gegebenen Parzialgleichung (4.). *)

## §. 446.

Betrachten wir nun die Fälle, wo zwei von den 3 Gleichungen (A,D), (B,D) und (C,D) des (§. 445.) ein Integral geben, ohne die dritte zu Hülfe nehmen zu müssen.

I. Die beiden Gleichungen (A,D) und (B,D) sind aber integrabel, wenn sie beide keine Veränderliche enthalten als $p'$, $x$, und $x''$. Sucht man wieder auf analogem Wege, wie im vorhergehenden (§. 445.), die Form der gegebenen Parzialgleichung dazu, so findet man

1) $$p'' = f_{x'';x';p'} + x \cdot \psi_{x''}.$$ **)

II. Die beiden Gleichungen (A,D) und (C,D) sind integrabel, ohne die (B,D) zu Hilfe nehmen zu müssen, wenn sie bloß $p'$; $x''$ und $x$ enthalten. Man findet wieder, daß dies allemal der Fall ist, so oft

---

*) In diesem Falle (III.) ist auch der Fall enthalten, wo die gegebene Parzialgleichung irgend eine Gleichung zwischen $p'$, $p''$ und $x$ ist, ohne $x'$ und $x''$ zu enthalten.

Uebrigens geht dieser Fall (III.) auch aus dem Fall (II.) hervor, wenn man in letzterem $x'$ mit $x$ vertauscht, d. h. $x'$ als Funktion von $x''$ und $x$ ansieht.

**) In diesem Falle steckt auch der Fall, in welchem

$$p'' = f_{x'';x';p'}$$

ist, d. h. in diesem Falle steckt auch jede beliebige Parzialgleichung der ersten Ordnung, welche nicht $x$ selbst enthält.

2) $$p'' = f_{p';x'';x} + p' \cdot x' \cdot \psi_{x''}$$

die gegebene und zu integrirende Parzialgleichung ist. *).

III. Die beiden Gleichungen (B,D) und (C,D) dagegen sind integrabel, wenn sie kein $x''$ enthalten. — Dies ist aber, wie man nach Anleitung des vorhergehenden Paragraphen findet, der Fall, wenn die gegebene Parzialgleichung die Form

3) $$p'' = \varphi_{x''} \cdot \psi_{p';x';x}$$

hat.

## §. 447.

Man kann noch versuchen die drei Gleichungen (§. 445. N. 1.) nach der Anleitung der (§. §. 378—380.) gleichzeitig zu integriren, dadurch, daß man die eine mit $\mu$, die andere mit $\mu'$, und die dritte mit $\mu''$ multiplizirt, die Resultate addirt, und nun $\mu$, $\mu'$ und $\mu''$ so zu bestimmen sucht, daß dieses Endresultat integrabel wird.

Weil aber dieses letztere die Kräfte unserer Analysis in der Regel weit übersteigt, so hat Legendre, welcher die vorstehenden Untersuchungen angestellt hat, die Frage umgekehrt, und die Form der Parzialgleichung aufgesucht, für welche dieses hier in Rede stehende Endresultat ein gegebenes Integral mit einer willkührlichen Konstante habe. — Diese Umkehrung der Frage wollen wir hier aber nicht weitläufiger berühren, da sie einerseits keine besonderen Schwierigkeiten darbietet, andererseits aber nicht besonders fruchtbar zu seyn scheint.

## §. 448.

Charpit hat auch versucht, seine Methode, oder vielmehr den von Lagrange genommenen und hier im (§. 435.) mitgetheilten Gang, auf Gleichungen zwischen 4 und mehr Veränderlichen auszudehnen.

Soll nämlich die Parzialgleichung

---

*) Dieser Fall (II.) geht auch aus dem Fall (I.) hervor, wenn man daselbst $x'$ und $x$ mit einander vertauscht, d. h. wenn man $x'$ als Funktion von $x$ und $x''$ ansieht.

1) $F_{x;x';x'';x''';\partial x_{x'};\partial x_{x''};\partial x_{x'''}} = 0$

integrirt werden, so führe man 3 neue Veränderliche $p'$; $p''$ und $p'''$ ein, mittelst der Gleichungen

2) $\partial x_{x'} = p'$; $\partial x_{x''} = p''$ und $\partial x_{x'''} = p'''$;

so daß dadurch die Parzialgleichung (1.) die Form

3) $F_{x,x',x'',x''',p',p'',p'''} = 0$

annimmt; und Funktionen von $x$, $x'$, $x''$ und $x'''$ gesucht werden, welche statt $p'$; $p''$ und $p'''$ gesetzt, so wie wiederum eine Funktion von $x'$; $x''$; $x'''$ gesucht wird, welche statt $x$ gesetzt, die Gleichung (3.) und die Gleichungen (2.) oder die Gleichung

4) $\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' - p''' \cdot \partial x''' = 0$

integrabel machen.

Die Gleichung (3.) kann nun wieder identisch gemacht werden, dadurch daß man sich solche nach $p'''$ algebraisch aufgelößt, und dann überall unter

5) $p'''$ diesen Werth $p'''_{x,x',x'',x''',p',p''}$

vorgestellt denkt. Dann aber wird die Gleichung (4.) integrabel, sobald man statt $p'$ und $p''$ solche Funktionen von $x$, $x'$, $x''$ und $x'''$ setzt, daß den nach (§. §. 407 und 408.) existirenden drei Bedingungsgleichungen ihrer Integrabilität genügt wird.

Weil man aber nun zur Bestimmung der beiden Funktionen

$p'_{x,x',x'',x'''}$ und $p''_{x,x',x'',x'''}$

drei (Parzial-) Gleichungen hat, in denen $p'$ und $p''$ vermischt vorkommen, so ist die Auffindung ihres allgemeinen Integrals, d. h. die Auffindung der allgemeinsten Werthe von $p'$ und $p''$, welche diesen 3 Gleichungen genügen, ungemeinen Schwierigkeiten unterworfen gewesen. Und wenn auch Charpit nicht einmal die allgemeinsten Werthe von $p'$ und $p''$ haben wollte, sondern nur Werthe mit 2 willkührlichen Konstanten, um solche in die Gleichung (4.) substituiren zu können (nachdem vorher statt $p'''$ bereits der aus (3.) gezogene Werth (5.) gesetzt worden ist), und

so durch allgemeine Integration der Gleichung (4.), ein Integral der gegebenen Parzialgleichung mit 3 willkührlichen Konstanten (d. h. ein vollständiges) zu erhalten; so konnte er doch nur in einigen wenigen Fällen durchdringen, so daß diese Versuche ziemlich unfruchtbar genannt werden können. (Vgl. Lacroix Traitè. T. II. pag. 576. seqq.).

Dagegen liefert die von uns hier in dem (§. 442.) mitgetheilte Methode des Pfaff auch das von Charpit gesuchte besondere aber vollständige Integral, wenn man der Gleichung (3.) daselbst durch dasjenige der nach (§. 422. d. VI. Th. d. S.) zu erhaltenden Systeme von n Urgleichungen genügt, welches bloß n willkührliche Konstanten, aber noch gar keine willkührliche Funktion in sich aufgenommen hat.

Und eben so liefert der von uns hier in dem (§. 439.) mitgetheilte Weg nicht minder auch das von Charpit gesuchte besondere aber vollständige Integral, wenn man statt einer der dortigen Funktionen $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-1}$, eine bloße Konstante setzt, die übrigen dieser Funktionen aber mittelst der dortigen linearen Parzialgleichungen dazu bestimmt, dabei aber nur genügende Werthe mit willkührlichen Konstannten nimmt.

Anmerkung. Um nicht unnützerweise weitläufig zu werden, beschließen wir diese Untersuchungen über Charpit's Methode mit der einfachen Bemerkung, daß man außerdem noch bei den Parzialgleichungen zwischen 4 oder mehr Veränderlichen alle die besonderen Mittel versuchen kann, welche bei den Gleichungen zwischen drei Veränderlichen versucht worden sind und versucht werden. (Vgl. Anmerkung zu §. 453.).

# Dritte Abtheilung.

## Besondere Methoden und Betrachtungen über die Integration der Parzialgleichungen der ersten Ordnung in endlicher Form.

### Vorerinnerung.

Fast zu allen allgemeinen Methoden gelangt man in der Regel erst dadurch, daß man vorher die Frage in mehreren ihrer speziellen Fälle betrachtet. Es wird daher nicht überflüssig erscheinen, wenn wir hier noch zeigen, wie man sich zu der Integration der lineären Parzialgleichungen, wie solche in der ersten Abtheilung dieses Kapitels gelehrt worden ist, durch die Betrachtung besonderer Fälle dieser Aufgabe, hat hinarbeiten können.

Ferner soll diese Abtheilung auch noch einige Versuche mittheilen, welche man in einzelnen Fällen gemacht hat, um zum Integral einer Parzialgleichung der ersten Ordnung überhaupt zu gelangen.

### §. 449.

Betrachtet man zunächst die nachstehende spezielle Form der lineären Gleichung, nämlich die Gleichung

$$1) \qquad X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''} = 0$$

oder

$$2) \qquad X_1 \cdot p' + X_2 \cdot p'' = 0,$$

wenn

$$3) \qquad \partial x_{x'} = p' \quad \text{und} \quad \partial x_{x''} = p''$$

gesetzt wird; unter der Voraussetzung jedoch, daß die Koeffizienten $X_1$ und $X_2$ nicht x selbst enthalten, sondern bloße Funktionen von x′ und x″ sind.

Der Gleichung (2.) genügt man offenbar, indem man

$$4) \qquad p'' = -\frac{X_1 \cdot p'}{X_2}$$

nimmt; und es bleiben daher jetzt nur noch die beiden Gleichungen (3.) zu integriren; d. h. man hat jetzt nur noch die totale Gleichung

$$5) \qquad \partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0,$$

wo alle bloßen $\partial$ sich auf irgend einen neuen Veränderlichen t beziehen, zu integriren, nachdem man vorher statt $p''$ seinen Werth aus (4.) gesetzt hat, und die Gleichung (5.) dadurch in diese andere

$$6) \qquad \partial x = \frac{p'}{X_2} \cdot (X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x'')$$

übergegangen ist. Diese Gleichung (6.) bleibt also noch zu integriren; und kann man für $p'$ jede Funktion von $x'$, $x''$ und $x$ setzen, welche die (6.) integrabel macht.

Weil aber der Ausdruck

$$X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x'',$$

nach der oben gemachten Voraussetzung, nicht $x$ selbst noch enthält, so hat er allemal einen integrirenden Faktor $\mu$; so daß

$$7) \qquad \int \mu \cdot (X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x'') \cdot dt = U_{x',x''}$$

gefunden werden kann *). Dadurch geht aber die zu integrirende Gleichung (6.) über in

$$8) \qquad \partial x = \frac{p'}{\mu \cdot X_2} \cdot \partial U.$$

Diese Gleichung wird nun allemal integrabel, wenn man $p'$ so nimmt, daß, wenn $\Psi_U$ eine ganz willkührliche Funktion von U vorstellt,

$$\frac{p'}{\mu \cdot X_2} = \partial \Psi_U$$

wird; denn sie liefert dann sogleich

$$9) \qquad x = \Psi_U.$$

Die Gleichung (9.) ist daher das allgemeine Integral der gegebenen Parzialgleichung (1.)

---

*) Sollte

$$X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x''$$

an sich schon integrabel seyn, so wäre bloß $\mu = 1$ zu nehmen.

Beispiele. 1) So findet sich das allgemeine Integral von

$$x \cdot \partial z_y - y \cdot \partial z_x = 0, \quad \text{sogleich} \quad z = \varphi_{x^2+y^2}.$$

2) Das allgemeine Integral von

$$x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y = 0,$$

wird $z = \varphi_{y:x}$ gefunden.

3) Von den Gleichungen $X_x \cdot \partial z_x + Y_y \cdot \partial z_y = 0$ und $Y_y \cdot \partial z_x + X_x \cdot \partial z_y = 0$, findet sich das allgemeine Integral sogleich $z = \varphi_U$, wo aber für den ersten Fall $U = \int \frac{1}{Y} \cdot dy - \int \frac{1}{X} \cdot dx$, für den andern Fall dagegen $U = \int Y \cdot dy - \int X \cdot dx$ ist.

## §. 450.

Der nächste spezielle Fall ist der, wo die zu integrirende Parzialgleichung noch immer die Form der vorher gegebenen hat, nämlich

$$1) \qquad X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''} = 0,$$

wo aber in $X_1$ und $X_2$ auch noch x selbst eingeht, so daß nun $X_1$ und $X_2$ gegebene Funktionen der 3 Veränderlichen x, x′ und x″ seyn sollen.

Man gelangt genau wie vorher im (§. 449.) zu der Gleichung (6.) nämlich

$$6) \qquad \partial x = \frac{p'}{X_2} \cdot (X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x'').$$

Hier kommt man nun auf den Gedanken, genau wie vorher im (§. 449.) zu verfahren, also die Gleichungen (7. und 8.) zu bilden, aber in der Bildung der Gleichung (7.) den Veränderlichen x als konstant anzusehen; zuletzt jedoch zu versuchen, ob das Endresultat (9.), nämlich

$$9) \qquad x = \Psi_U$$

(wo aber U den Buchstaben x selber noch enthält) nicht vielleicht dennoch allen Bedingungen des allgemeinen Integrals genügt.

Differenziirt man aber die (9.) nach allem x′, so erhält man

$$10) \qquad \partial x_{x'} = \partial \Psi_U \cdot (\partial U_{x'} + \partial U_x \cdot \partial x_{x'}),$$

also 11) $$\partial x_{x'} = \frac{\partial \Psi'_U \cdot \partial U_{x'}}{1 - \partial \Psi'_U \cdot \partial U_x}.$$

Gerade so erhält man aber auch

12) $$\partial x_{x''} = \frac{\partial \Psi'_U \cdot \partial U_{x''}}{1 - \partial \Psi'_U \cdot \partial U_x}.$$

Substituirt man nun diese Werthe statt $\partial x_{x'}$ und $\partial x_{x''}$ in die gegebene Parzialgleichung (1.), nämlich in die Gleichung

$$X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''} = 0,$$

so geht solche in

$$\frac{\partial \Psi'_U}{1 - \partial \Psi'_U \cdot \partial U_x} \cdot (X_1 \cdot \partial U_{x'} + X_2 \cdot \partial U_{x''}) = 0$$

d. h. in

13) $$X_1 \cdot \partial U_{x'} + X_2 \cdot \partial U_{x''} = 0$$

über. Weil aber nach (7.)

$$\partial U_{x'} = \mu \cdot X_2 \quad \text{und} \quad \partial U_{x''} = -\mu \cdot X_1$$

ist, so ist letztere Gleichung (13.) identisch $0 = 0$.

Also ist die Gleichung

$$x = \Psi'_U,$$

wo U eine bekannte Funktion von $x'$, $x''$ und $x$ ist, wirklich das allgemeine Integral der Gleichung (1.).

Man kann sich jedoch nun fragen, durch welche Betrachtungen man à priori zu der Ueberzeugung hätte gebracht werden können, daß die eben entwickelte Behandlungsart nothwendig zum allgemeinen Integral führt? — Es war aber der Gleichung (6.) nämlich

6) $$\partial x = \frac{p'}{X_2} \cdot (X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x'')$$

zu genügen. Dies geschieht nun zunächst, wenn man jede Seite der Gleichung für sich der Null gleich nimmt; also wenn man

14) $\partial x = 0$ und 15) $X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x'' = 0$

d. h. wenn man

16) $x = a$ und $U_{a,x',x''} = b$

nimmt, wo a und b zwei durch die Integration eingegangene willkührliche Konstanten sind. Weil aber diese beiden Gleichungen zwischen x, x′ und x″, eine Abhängigkeit zwischen x′ und x″ selbst herbeiführen würden, welche hier nicht statt finden darf, so kommt man weiter auf den andern Gedanken, durch diese Gleichungen (16.) zwei neue Veränderliche a und b statt der alten x′ und x″ einzuführen, damit die Gleichung (6.) selbst die Form $\partial a = \omega \cdot \partial b$ annehmen könne. Dadurch wird, weil sich nun x′ und x″ in x, a und b ausdrücken, auch ∂x′ und ∂x″ in ∂x, ∂a und ∂b ausgedrückt; und dadurch geht dann die Gleichung (6.) in die Form

17) $X \cdot \partial x + A \cdot \partial a + B \cdot \partial b = 0$

über. Weil man aber schon weiß, daß die Gleichung (6.), so oft a und b konstant gedacht werden, so oft also $\partial a = \partial b = 0$ gedacht wird, identisch wird, so kann man à priori schließen, daß bei der Durchführung der Rechnung $X = 0$ sich ausweisen muß, also daß die Gleichung (17.) bloß diese Form annimmt, nämlich die Form

18) $A \cdot \partial a + B \cdot \partial b = 0$ oder $\partial a = \omega \cdot \partial b$ d. h. $\partial x = \omega \cdot \partial U$

wo $\omega$ auch noch den Ausdruck p′ enthält.

Und weil in der Gleichung (6.) dieser Ausdruck p′, wenn auch beliebig, doch nicht anders als so gedacht werden darf, daß die Gleichung (6.), also die Gleichung (18.), integrabel ist, so muß man $\omega = \partial \psi_U$ nehmen, also daß à priori $x = \psi_U$ als das allgemeine Integral erkannt wird.

## §. 451.

Versucht man es nun, die allgemeine lineäre Parzialgleichung

1) $X_1 \cdot \partial x_{x'} + X_2 \cdot \partial x_{x''} = X,$

wo $X_1$, $X_2$ und X gegebene Funktionen der 3 Veränderlichen x, x′ und x″ sind, auf einem analogen Wege zu integriren, so

erhält man, man mag neue Veränderliche p′ und p″ einführen, oder es lieber unterlassen,

$$2) \qquad \partial x_{x''} = \frac{X - X_1 \cdot \partial x_{x'}}{X_2}.$$

Und setzt man diesen Werth in die Gleichung

$$3) \qquad \partial x = \partial x_{x'} \cdot \partial x' + \partial x_{x''} \cdot \partial x'',$$

wo sich alle bloßen ∂ auf einen neuen Veränderlichen t beziehen, statt $\partial x_{x''}$; so geht hervor

$$4) \qquad X_2 \cdot \partial x - X \cdot \partial x'' = \partial x_{x'} \cdot (X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x''),$$

welche nun als eine totale Differenzialgleichung noch zu integriren bleibt.

Erster Fall. Kommt nun in dieser Gleichung auf der linken Seite kein x′, und zu gleicher Zeit auf der rechten Seite kein x vor, so existiren zwei integrirende Faktoren, $\mu$ und $\mu_1$, so daß

$$5) \qquad \int \mu \cdot (X_2 \cdot \partial x - X \cdot \partial x'') \cdot dt = U_{x,x''}$$

und

$$6) \qquad \int \mu_1 \cdot (X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x'') \cdot dt = V_{x',x''}$$

gefunden werden kann; — und es geht die Gleichung (4.) über in

$$7) \qquad \partial U = \frac{\partial x_{x'} \cdot \mu}{\mu_1} \cdot \partial V;$$

welche offenbar integrabel wird, wenn man die in der gegebenen Parzialgleichung (1.) oder (2.) unbestimmt gebliebene Ableitung $\partial x_{x'}$ so nimmt, daß $\frac{\partial x_{x'} \cdot \mu}{\mu_1} = \partial \psi_V$ wird, woraus dann wie oben

$$8) \qquad U = \psi_V$$

als das allgemeine Integral hervorgeht.

Differenzirt man diese Gleichung (8.) nach allem x′, so erhält man

$$9) \qquad \partial U_x \cdot \partial x_{x'} = \partial \psi_V \cdot \partial V_{x'};$$

während aus den Gleichungen (5. und 6.)

10) $\partial U_x = \mu \cdot X_2$ und 11) $\partial V_{x'} = \mu_1 \cdot X_2$

hervorgeht, so daß die (9.) dadurch in

12) $$\frac{\partial x_{x'} \cdot \mu}{\mu_1} = \partial \psi_V$$

übergeht, so wie nun die (7.) in folgende, nämlich in

13) $$\partial U = \partial \psi_V \cdot \partial V;$$

welche Gleichung genau mit der Gleichung (8.) zusammenfällt.

Hieher gehört das Beispiel

$$x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y = nz.$$

Man erhält zum allgemeinen Integral

$$z = x^n \cdot \varphi_{y:x}.$$

Zweiter Fall. Enthalten dagegen beide Seiten der Gleichung (4.) die Veränderlichen x, x′ und x″ nach Belieben, so wird man doch jetzt wieder nach dem Vorbilde des (§. 450.) dieser Gleichung

4) $X_2 \cdot \partial x - X \cdot \partial x'' = \partial x_{x'} \cdot (X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x')$

dadurch zunächst genügen, daß man jede Seite der Gleichung für sich der Null gleich setzt, also

14) $X_2 \cdot \partial x - X \cdot \partial x'' = 0$ und $X_2 \cdot \partial x' - X_1 \cdot \partial x'' = 0$

nimmt. — Integrirt man nun diese beiden Gleichungen (5.) nach den (§. §. 281. oder 282. Anmerkung. 1. d. V. Th. d. S.) und führt dann genau nach dem Vorbilde des (§. 450.), und durch analoge Betrachtungen dazu veranlaßt, zwei neue Veränderliche a und b mittelst dieser Integralgleichungen ein, welche letztere, wenn man will, in der Form

15) $a = U_{x,x',x''}$ und $b = V_{x,x',x''}$

hingestellt werden können (wo a und b die bei dem Integriren eingehenden willkührlichen Konstanten sind), so wird die Gleichung (4.) in die Form

16) $$\mathfrak{X} \cdot \partial x + A \cdot \partial a + B \cdot \partial b = 0$$

übergehen, während sie, wie wir wissen, identisch $0 = 0$ werden

muß, so oft $\partial a = \partial b = 0$ gedacht sind, so daß man à priori schließen kann, daß bei der wirklichen Durchführung der Rechnung der Koeffizient $\mathfrak{X}$ der Null gleich werden muß, also daß die Gleichung (16.) noch einfacher werden und bloß die Form

$$17) \qquad A\cdot\partial a + B\cdot\partial b = 0$$

annehmen wird. Und da in dieser Gleichung noch $\partial x_{x'}$ vorkommt, dieses aber so angenommen werden muß, daß die Gleichung (4.), folglich die Gleichung (17.) integrabel wird, so darf man nur der Gleichung (17.) die Form

$$18) \qquad \partial b = \partial\psi_a\cdot\partial a$$

geben, wo $\psi_a$ eine willkührliche Funktion von a ist, um dieser Bedingung genügt, und dann

$$19) \qquad b = \psi_a \quad \text{d. h.} \quad V = \psi_U$$

zu haben, wo $\psi_U$ eine ganz willkührliche Funktion von U ist.

Man kann auch die Rechnung, wodurch die Gleichung (4.) auf die Gleichung (16.) gebracht wird, durchführen, und so à posteriori beweisen, daß die Reduktion auf die Gleichung (17.) nothwendig ist.

Die Gleichungen (15.) geben nämlich

$$20) \qquad \begin{cases} \partial a = \partial U_{x''}\cdot\partial x'' + \partial U_{x'}\cdot\partial x' + \partial U_x\cdot\partial x; \\ \partial b = \partial V_{x''}\cdot\partial x'' + \partial V_{x'}\cdot\partial x' + \partial V_x\cdot\partial x. \end{cases}$$

Findet man nun aus diesen letztern Gleichungen (20.) sowohl $\partial x''$ als $\partial x'$, und substituirt man diese Werthe in die (4.), so erhält man die Gleichung von der Form (16.) nämlich

$$\mathfrak{X}\cdot\partial x + A\cdot\partial a + B\cdot\partial b = 0,$$

in welcher aber

$$21) \qquad \mathfrak{X} = [(\partial U_{x''}\cdot\partial V_{x'} - \partial V_{x''}\cdot\partial U_{x'})\cdot X_2 + (\partial U_x\cdot\partial V_{x'} - \partial V_x\cdot\partial U_{x'})\cdot X_1]$$
$$+ \partial x_{x'}\cdot[(\partial U_x\cdot\partial V_{x''} - \partial V_x\cdot\partial U_{x''})\cdot X_2 + (\partial U_x\cdot\partial V_{x'} - \partial V_x\cdot\partial U_{x'})\cdot X]$$

$$22) \qquad A = -\partial V_{x'}\cdot X + \partial x_{x'}\cdot(\partial V_{x''}\cdot X_2 + \partial V_{x'}\cdot X_1)$$

$$23) \qquad B = \partial U_{x'}\cdot X - \partial x_{x'}\cdot(\partial U_{x''}\cdot X_2 + \partial U_{x'}\cdot X_1)$$

gefunden werden.

Da nun die aus den Gleichungen (14.) hervorgehenden Werthe die Funktionen U und V in (15.) konstant, also auch $\partial U = 0$ und $\partial V = 0$ d. h.

$$24)\qquad \begin{cases} \partial U_{x''} \cdot \partial x'' + \partial U_{x'} \cdot \partial x' + \partial U_x \cdot \partial x = 0, \\ \partial V_{x''} \cdot \partial x'' + \partial V_{x'} \cdot \partial x' + \partial V_x \cdot \partial x = 0 \end{cases}$$

identisch machen, so sind also identisch die Gleichungen

$$25)\qquad \begin{cases} \partial U_{x''} \cdot X_2 + \partial U_{x'} \cdot X_1 + \partial U_x \cdot X = 0, \\ \partial V_{x''} \cdot X_2 + \partial V_{x'} \cdot X_1 + \partial V_x \cdot X = 0, \end{cases}$$

welche aus (24.) hervorgehen, wenn man statt $\partial x$ und $\partial x'$ ihre Werthe aus (14.) substituirt. — Eliminirt man aber aus diesen beiden Gleichungen (25.) abwechselnd $X$ und $X_1$, so zeigt sich jede der beiden Zeilen des Ausdrucks $\mathfrak{X}$ in (21.) der Null gleich, so daß also unabhängig von $\partial x_{x'}$ der Koeffizient $\mathfrak{X}$ der Null gleich wird.

Und so sieht man sich also auch auf diesem Wege zu der von uns im (§. 429.) mitgetheilten Methode des Lagrange für die Integration der lineären Parzialgleichungen der ersten Ordnung zwischen drei Veränderlichen geführt. — Durch solche Betrachtungen ist auch Monge zu derselben Methode des Lagrange gelangt, ohne, wie es scheint, die Arbeit des Lagrange vorher gekannt zu haben.

Anmerkung. Daß man diese Betrachtungen des (§. 451.) auf lineäre Gleichungen zwischen 4 und beliebig viel Veränderlichen ausdehnen könne, fällt von selbst in die Augen.

## §. 452.

Sind aber zwischen 4 Veränderlichen $x$, $x'$, $x''$ und $x'''$ zwei lineäre Parzialgleichungen gegeben, z. B. die beiden Gleichungen

$$1)\qquad X_3 \cdot \partial x_{x'''} + X_2 \cdot \partial x_{x''} + X_1 \cdot \partial x_{x'} = X$$

$$2)\qquad X'_3 \cdot \partial x_{x'''} + X'_2 \cdot \partial x_{x''} + X'_1 \cdot \partial x_{x'} = X',$$

so kann man sich desselben Verfahrens bedienen, um solche, wenn dies möglich ist, gleichzeitig zu integriren. Man muß nämlich aus den Gleichungen (1. und 2.) sowohl $\partial x_{x'''}$, als auch $\partial x_{x''}$ finden, und diese Werthe in die eigentlich zu integrirende Gleichung

$$3)\qquad \partial x - \partial x_{x'} \cdot \partial x' - \partial x_{x''} \cdot \partial x'' - \partial x_{x'''} \cdot \partial x''' = 0$$

substituiren. Die neue Gleichung wird dann die Form annehmen

4) $\alpha \cdot \partial x + \beta \cdot \partial x'' + \gamma \cdot \partial x''' = \partial x_{x'} \cdot (\alpha' \cdot \partial x' + \beta' \cdot \partial x'' + \gamma' \cdot \partial x''')$;

und ihr allgemeines Integral wird

5) $$V = \varphi_U$$

seyn, wo $\varphi$ eine ganz willkührliche Funktion von U ist, sobald man nur die beiden Gleichungen

6) $\alpha \cdot \partial x + \beta \cdot \partial x'' + \gamma \cdot \partial x''' = 0$ und $\alpha' \cdot \partial x' + \beta' \cdot \partial x'' + \gamma' \cdot \partial x''' = 0$

dergestalt integriren kann, daß, wenn ihre Integrale nach den beiden eingehenden willkührlichen Konstanten algebraisch aufgelößt werden, solche die Form

7) $$a = U \quad \text{und} \quad b = V$$

annehmen.

Solche Integrale, wie die in (7.) aufgestellten, werden aber im Allgemeinen nicht, sondern nur dann existiren, wenn die Koefizienten der gegebenen Gleichungen noch gewissen Bedingungen genügen, welche man findet, wenn man aus den beiden Gleichungen (6.) jede Spur von einem der Veränderlichen eliminirt, und dann die Bedingungen aufsucht, unter denen die hervorgehende Gleichung zwischen den drei übrigen Veränderlichen integrabel ist.

## §. 453.

Da bei der Integration der Parzialgleichungen der ersten Ordnung zwischen 3 Veränderlichen, sie mögen übrigens lineär seyn oder nicht, alles darauf ankommt, die Gleichung

$\alpha$) $$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

(wo sich die bloßen $\partial$ auf einen beliebigen neuen Veränderlichen t beziehen, und wo $p'$ und $p''$ neue, beziehlich den Ableitungen $\partial x_{x'}$ und $\partial x_{x''}$ gleich gesetzte Veränderliche sind) zu integriren, unter der Voraussetzung, daß vorher statt $p''$ sein aus der gegebenen Parzialgleichung

$\beta$) $$F_{x;x';x'';p';p''} = 0$$

gezogener Werth, statt $p'$ aber irgend einer der Werthe gesetzt

wird, welcher dann die aus (α.) hervorgehende Gleichung integrabel macht; — so kann man auch einen neuen Veränderlichen $\omega$ einführen, durch irgend eine Gleichung

$$\gamma) \qquad H_{x;\,x';\,x'';\,p';\,p'';\,\omega} = 0,$$

aus (β. und γ.) sowohl $p''$, als auch $p'$ in $\omega$ ausdrücken, diese Werthe in (α.) substituiren, und nun noch $\omega$ beliebig, aber so annehmen, daß die hervorgehende Gleichung integrabel wird. *) Integrirt man dann diese letztere Gleichung, so hat man allemal ein Integral der gegebenen Parzialgleichung (β.); und man hat höchstens darauf noch zu sehen, daß unter allen Werthen von $\omega$, welche der Bedingung der Integrabilität der Gleichung (α.) genügen, ein solcher genommen werde, welcher dem End-Integral die gewünschte Allgemeinheit gewährt.

Verfolgen wir diese Idee zunächst auf zweien verschiedenen Wegen:

I. Integrirt man gleich direkt jedes Glied der Gleichung (α.), und zwar die zwei letztern Glieder theilweise, so erhält man dieselbe Gleichung (α.) auch in dieser Gestalt:

$$1) \qquad p' \cdot x' + p'' \cdot x'' - x = \int (x' \cdot \partial p' + x'' \cdot \partial p'') \cdot dt.$$

Nun kann man $\omega$ einführen mittelst der Gleichung

$$2) \qquad p' \cdot x' + p'' \cdot x'' - x = \omega,$$

und es geht dann die Gleichung (α.) oder (1.) über in

$$3) \qquad \partial\omega = x' \cdot \partial p' + x'' \cdot \partial p'';$$

und alles hängt nun davon ab, $\omega$ so zu nehmen, daß diese Gleichung (3.) integrabel wird, nachdem man vorher in ihr statt $p'$ und $p''$ ihre aus den Gleichungen (β. und 2.) gezogenen Werthe (in $x$; $x'$; $x''$ und $\omega$ ausgedrückt) substituirt hat, während man auch statt der Veränderlichen $x'$ und $x''$ die

---

*) In einzelnen Fällen läßt sich die zuletzt aus (α.) hervorgehende Gleichung vielleicht auch in zwei integrable Gleichungen zerlegen, indem die eine als zur Bestimmung von $\omega$ dienend angesehen werden kann, die andere aber dann statt der Gleichung (α.) steht.

Veränderlichen $p'$ und $p''$ einführen kann, so daß $x'$ und $x''$ mittelst der Gleichungen ($\beta$. und 2.) eliminirt werden.

Beispiel 1. Ist also z. B. gegeben die Parzialgleichung

$\beta'$) $\quad x'' + x' \cdot f_{p';p'';x' \cdot p' + x'' \cdot p'' - x} = \psi_{p';p'';x' \cdot p' + x'' \cdot p'' - x}$;

und setzt man den aus ihr gezogenen Werth von $x''$ in die Gleichung (3.), so wird sie folgende, nämlich

4') $\quad \partial\omega = x' \cdot (\partial p' - f_{p';p'';\omega} \cdot \partial p'') + \psi_{p';p'';\omega} \cdot \partial p''$.

Sucht man nun dieser Gleichung dadurch zu genügen, daß man einzeln den Koeffizienten von $x'$ der Null gleich setzt, also daß die (4'.) in das System der beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \partial p' - f_{p';p'';\omega} \cdot \partial p'' = 0 & \text{5')} \\ \partial\omega - \psi_{p';p'';\omega} \cdot \partial p'' = 0 & \text{6')} \end{cases}$$

übergeht; und findet man zu diesen beiden Gleichungen zwei Integralgleichungen zwischen $p'$, $p''$ und $\omega$ und zweien Konstanten a und b (nach §. §. 281. 282. d. V. Th. d. S.), so darf man nur aus diesen beiden Integralgleichungen, in Verbindung mit der Gleichung ($\beta'$.) und der Gleichung (2.) sowohl $\omega$, als auch $p'$ und $p''$ eliminiren, um das gesuchte vollständige Integral der ($\beta'$.) zu haben.

Beispiel 2. Ist die gegebene Parzialgleichung diese:

($\beta'$) $\quad x' \cdot p' + x'' \cdot p'' - x = \psi_{p';p''}$ oder $\omega = \psi_{p';p''}$;

so wird der Gleichung ($\alpha$.) d. h. der Gleichung (3.) und der gegebenen Parzialgleichung ($\beta'$.) offenbar zu gleicher Zeit genügt, wenn man

4') $\quad p' = a; \quad p'' = b \quad$ und $\quad \omega = \psi_{a,b}$

setzt. — Also ist die Gleichung

5') $\quad \omega = \psi_{a,b}$

oder, wenn statt $\omega$ sein Werth aus (2.) gesetzt wird, die Gleichung

6') $\quad a \cdot x' + b \cdot x'' - x = \psi_{a,b}$

das vollständige Integral der gegebenen Parzialgleichung

($\beta'$) $\quad x' \cdot p' + x'' \cdot p'' - x = \psi_{p';p''}$.

II. A. Verändert man nicht direkt, wie in (I.) geschehen ist, die Gleichung ($\alpha$.), sondern lieber die gegebene Parzialgleichung ($\beta$.), so daß man dieser letztern, was allemal auf unend-

lich viele verschiedene Weisen geschehen kann, diese Form

1) $f_{x;x';x'';p''} = \psi_{x;x';x'';p'}$

giebt, so nämlich, daß links nicht $p'$, rechts dagegen nicht $p''$ vorkommt; — so führe man dasmal $\omega$ ein durch die Gleichung

2) $f_{x;x';x'';p''} = \omega,$

so daß die Gleichung (1.) übergeht in

3) $\psi_{x,x',x'',p'} = \omega.$

Findet man nun abermals aus den Gleichungen (2. und 3.) $p''$ und $p'$, nämlich

4) $p'' = f''_{x,x',x'',\omega}$ und 5) $p' = f'_{x,x',x'',\omega}$;

und substituirt man diese Werthe in die noch zu integrirende Gleichung ($\alpha$.) d. h. in

$\alpha)$ $\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0,$

so erhält man

6) $\partial x = f' \cdot \partial x' + f'' \cdot \partial x''.$

Damit nun diese Gleichung integrabel sey, muß man $\omega$ so nehmen, daß

$$\partial f'_{(x'')} = \partial f''_{(x')}$$

d. h.

$(\odot)\cdots$ $\partial f'_x \cdot f'' + \partial f'_{x''} + \partial f'_\omega \cdot \partial \omega_{(x'')} = \partial f''_x \cdot f' + \partial f''_{x'} + \partial f''_\omega \cdot \partial \omega_{(x')}$

wird.

Betrachten wir den besondern Fall, in welchem die gegebene Partialgleichung diese einfachere Form hat, nämlich

1′) $f_{x'';p''} = \psi_{x';p'}$ ;

so daß $f''$ weder x noch $x'$, und $f'$ weder x noch $x''$ enthält, so ist der Gleichung ($\odot$), weil jetzt $\partial f'_x = \partial f''_x = \partial f'_{x''} = \partial f''_{x'} = 0$ ist, offenbar durch einen beliebigen Konstanten Werth von $\omega$ genügt, und das gesuchte Integral aus (6.) wird nun

2′) $x = \int f'_{x';\omega} \cdot dx' + \int f''_{x'';\omega} \cdot dx'' + C,$

und hat die beiden willkührlichen Konstanten $\omega$ und C.

Daraus erhält man aber nach (§. 444.) zum allgemeinen Integral der gegebenen Parzialgleichung (1′.) das nachstehende System zweier Gleichungen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} x &= \int f'_{x';\omega}\cdot dx' + \int f''_{x'';\omega}\cdot dx'' + C_\omega \\ 0 &= \int \partial f'_\omega \cdot dx' + \int \partial f''_\omega \cdot dx'' + \partial C_\omega \end{aligned}\right\},$$

aus denen $\omega$ noch eliminirt gedacht werden muß, während $C_\omega$ jede willkührliche Funktion von $\omega$ vorstellt.

B) Es läßt sich aber erweisen,
daß jede Parzialgleichung der ersten Ordnung zwischen 3 Veränderlichen, für welche ein vollständiges Integral in endlicher Form existirt, allemal dergestalt auf die obige Form

$$f_{x,x',x'',p''} = \psi_{x,x',x'',p'}$$

gebracht werden kann, daß ein der Gleichung ⊙ genügendes $\omega$ existirt, welches konstant ist; so daß die aus $f = \omega$ und $\psi = \omega$ gezogenen $f'$ und $f''$, der aus (⊙) für $\omega$ konstant hervorgehenden, einfacheren, Gleichung

(C)… $$\partial f'_x \cdot f'' + \partial f'_{x''} = \partial f''_x \cdot f' + \partial f''_{x'}$$

genügen.

Denn es sey das vollständige Integral der gegebenen Parzialgleichung mit den beiden willkührlichen Konstanten $c$ und $c_1$ auf die Form gebracht

1.1.) $$c_1 = W_{x;x';x'';c};$$

so erhält man, wenn diese Gleichung nach $x'$ und nach $x''$ differenziirt wird

2.2.) $$0 = \partial W_{x'} + \partial W_x \cdot p'$$

3.3.) $$0 = \partial W_{x''} + \partial W_x \cdot p''.$$

Aus der (2.2.) findet man

4.4.) $$c = \psi_{x;x';x'';p'};$$

aus der (3.3.) dagegen

5.5.) $$c = f_{x;x';x'';p''};$$

und da, wenn diese beiden Werthe von c einander gleich gesetzt werden, die gegebene Parzialgleichung (wenn auch in einer Umformung) hervorgehen muß, so ist dadurch die letztere Behauptung außer Zweifel gesetzt, in so ferne man nun $\omega = c$ hat.

C. Weil aber unter den in (A.) bemerkten unendlich vielen Arten, die gegebene Parzialgleichung in der fraglichen Form

$$f_{x,x',x'',p''} = \psi_{x,x',x'',p'}$$

ausgedrückt zu sehen, es sehr schwer seyn dürfte, jedesmal diejenige dieser Umformungen zu treffen, für welche $\omega$ in (A.) konstant, also die Gleichung ($\mathfrak{C}$ in B.) identisch werden kann, so wird es in manchen Fällen gerathener seyn, diese Zerlegung der Parzialgleichung nicht direkt vorzunehmen, sondern zuerst

$$p' = f'_{x,x',x'',\omega} \quad \text{oder} \quad p'' = f''_{x,x',x'',\omega}$$

nach Gutdünken entweder völlig bestimmt, oder besser noch, bloß der Form nach anzunehmen, aus der gegebenen Parzialgleichung entweder

$$p'' = f''_{x,x',x'',\omega} \quad \text{oder} \quad p' = f'_{x,x',x'',\omega}$$

dazu zu finden, und dann entweder zu untersuchen, ob diese zusammengehörigen $f'$ und $f''$ der Gleichung ($\mathfrak{C}$ in B.) genügen, oder die unbestimmt gelassenen Faktoren so zu bestimmen, daß diese Gleichung ($\mathfrak{C}$ in B.) identisch werde.

Beispiel. Ist gegeben die Parzialgleichung

1′) $$p'' = p'^{n} \cdot X' \cdot X'' \cdot X,$$

wo $X'$ bloß $x'$ allein, $X''$ bloß $x''$ allein, und $X$ bloß $x$ allein enthält, während wiederum unter $p'$ und $p''$ die Ableitungen $\partial x_{x'}$ und $\partial x_{x''}$ verstanden werden, — so setze man, um der Gleichung ($\mathfrak{C}$ in B.) zu genügen,

2′) $$p'^{n} \cdot X' = \omega \cdot P_x \quad \text{d. h.} \quad p' = \frac{\omega^{\frac{1}{n}} \cdot P_x^{\frac{1}{n}}}{X'^{\frac{1}{n}}} = f',$$

wo $P_x$ eine noch unbestimmte Funktion von $x$ allein ist; und es wird aus (1′.)

3′) $$p'' = \omega \cdot X'' \cdot X \cdot P_x = f''.$$

Die Gleichung (ℭ in B) wird aber nun, gehörig reduzirt,

4′) $$0 = (n-1) \cdot \frac{\partial P_x}{P} + n \cdot \frac{\partial X_x}{X}$$

und giebt, wenn man sie integrirt und die eingehende Konstante beliebig bestimmt,

5′) $$1 = P^{n-1} \cdot X^n.$$

Diese Gleichung (ℭ) wird also ebenfalls identisch, wenn man

6′) $$P = X^{\frac{n}{n-1}}$$

nimmt. —

Die zu integrirende Gleichung (α.) oder

α) $$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

wird aber dadurch folgende:

7′) $$\partial x - \left(\frac{\omega}{X'}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{X^{\frac{1}{n-1}}} \cdot \partial x' - \omega \cdot X'' \cdot \frac{1}{X^{\frac{1}{n-1}}} \cdot \partial x'' = 0,$$

hat den integrirenden Faktor $\sqrt[n-1]{X}$, und giebt, wenn man sie damit multiplizirt und integrirt,

8′) $$\int X^{\frac{1}{n-1}} \cdot dx - \omega^{\frac{1}{n}} \cdot \int \frac{1}{X'^{\frac{1}{n}}} \cdot dx' - \omega \cdot \int X'' \cdot dx'' = C,$$

und dies ist das gesuchte besondere aber vollständige Integral der gegebenen Parzialgleichung mit den beiden willkührlichen Konstanten $\omega$ und C, aus welchem nun auch nach (§. 444.) das allgemeine Integral gefunden werden kann.

D) Ja, man kann öfter f′ und f″ beide zugleich, wenigstens der Form nach und mit unbestimmten Koeffizienten, so annehmen, daß sie der Gleichung (ℭ in B.) genügen, und dann erst diese Funktionen statt p′ und p″ in die gegebene Parzialgleichung substituiren, und zusehen, ob sie durch eine schickliche Annahme der unbestimmt gelassenen Koeffizienten identisch werden könne.

Namentlich versuche man folgende 3 Formen:

aa) Man setze $p' = a \cdot X_x = f'$; $p'' = b \cdot X_x = f''$;

so ist die Gleichung (ℂ) allemal identisch, wenn nur a und b beliebig konstant sind, und dabei X bloß x allein enthält, und nicht noch x′ oder x″.

Dies ist allemal anwendbar, so oft die gegebene Parzialgleichung ausser x, p′ und p″, nicht noch x′ oder x″ selbst enthält.

bb) Oder man setze

$$p' = a \cdot \varphi_{x',x''} = f' \quad \text{und} \quad p'' = b \cdot \Pi_{x',x''} = f'';$$

so ist die Gleichung (ℂ) identisch, wenn man nur $\varphi$ und $\Pi$ ohne x selbst und so nimmt, daß

(ℂ·b.)··· $$a \cdot \partial\varphi_{x''} = b \cdot \partial\Pi_{x'}$$

wird.

Dies zu versuchen ist räthlich, so oft die gegebene Parzialgleichung ausser x′; x″; p′ und p″ nicht noch x selbst enthält.

cc) Oder endlich man setze

$$p' = a \cdot \varphi_{x',x''} \cdot X_x = f' \quad \text{und} \quad p'' = b \cdot \Pi_{x',x''} \cdot X_x = f'.$$

Auch diese Annahme reduzirt die Gleichung (ℂ in B.) bloß auf diese

(ℂ·c)··· $$a \cdot \partial\varphi_{x''} = b \cdot \partial\Pi_{x'};$$

welcher man also durch schickliche Annahme der Funktionen

$$\varphi_{x',x''} \text{ und } \Pi_{x',x''}$$

zu genügen hat. Der gegebenen Parzialgleichung selbst muß dann noch durch schickliche Annahme der Funktion $X_x$ und der Konstanten a und b genügt werden.

Diese letztere Form von f′ und f″ kann aber versucht werden, wenn die gegebene Parzialgleichung ausser x′ und x″ auch noch x selbst enthält.

Beispiel. 1. Es sey gegeben die Parzialgleichung

1′) $$x^2 - p' \cdot x + p'' = 0;$$

so lasse man die Substitution (a·a.) statt finden, d. h. man setze

2′) $p' = a \cdot X_x$ und $p'' = b \cdot X_x$.

Dann ist der Gleichung (C) genügt, und die Parzialgleichung (1′.) selbst geht dadurch über in

3′) $x^2 - a \cdot x \cdot X + b \cdot X = 0$,

und giebt, soll sie identisch werden,

4′) $X = \frac{x^2}{ax - b}$.

Die Gleichung (α.), nämlich

5′) $\partial x - \frac{ax^2}{ax-b} \cdot \partial x' - \frac{bx^2}{ax-b} \cdot \partial x'' = 0$

ist dann integrabel, und giebt, wenn man sie mit dem integrirenden Faktor $\frac{ax-b}{x^2}$ multiplizirt und integrirt,

6′) $a \cdot log\, x + \frac{b}{x} - ax' - b \cdot x'' = C$,

welches ein vollständiges Integral ist, mit 3 willkührlichen Konstanten a, b und C, so daß man statt b noch eine beliebige Funktion von a setzen kann, oder irgend einen Ziffernwerth, wenn man nur zwei willkührliche Konstanten behalten will. — Aus diesem Integral geht dann das allgemeine nach (§. 444.) hervor.

Beispiel. 2. Ist gegeben die Parzialgleichung

1′) $p' \cdot p'' - m \cdot x' \cdot x'' = 0$,

so lasse man die Substitution (b·b.) eintreten, nämlich

2′) $p' = a \cdot \varphi_{x',x''} = f'$ und $p'' = b \cdot \Pi_{x',x''}$.

Der Gleichung (C·b), in welche die (C in B.) jetzt übergeht, nämlich der Gleichung

(C·b)··· $a \cdot \partial \varphi_{x''} = b \cdot \partial \Pi_{x'}$

genügt man offenbar, wenn man $\partial \varphi_{x''} = \partial \Pi_{x'} = 0$ nimmt, d. h. also auch, wenn man

$$\varphi = x' \text{ und } \Pi = x''$$

nimmt. — Diese Werthe in (1′.) substituirt, geben aber

3′) $ab - m = 0$, d. h. $b = \frac{m}{a}$.

Die Gleichung (α.), nämlich

α) $\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$

wird daher jetzt

$$4') \qquad \partial x - a x' \cdot \partial x' - \frac{m}{a} \cdot x'' \cdot \partial x'' = 0,$$

und giebt, integrirt,

$$5') \qquad x - \tfrac{1}{2} a \cdot x'^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m}{a} \cdot x''^2 = C$$

als das gesuchte Integral mit den beiden willkührlichen Konstanten. *)

Beispiel 3. Ist gegeben die Parzialgleichung

$$1') \qquad x'^2 \cdot x^m - p' \cdot p'' + x^{\frac{1}{2}m} \cdot p' = 0,$$

so setze man nach (c.c.):

$$2') \quad p' = a \cdot \varphi_{x', x''} \cdot X_x = f' \quad \text{und} \quad p'' = a \cdot \Pi_{x', x''} \cdot X_x = f'';$$

und der Gleichung

$$(\!(\cdot c)\!) \cdots \qquad a \cdot \partial \varphi_{x''} = b \cdot \partial \Pi_{x'}$$

welche dann an die Stelle der ((( in B.) tritt, wird wiederum genügt, wenn man

$$\partial \varphi_{x''} = \partial \Pi_{x'} = 0$$

---

*) Man kann der Gleichung ((( b.) auch genügen, indem man

$$\varphi = \frac{1}{a} x'' \cdot \sqrt{m} \quad \text{und} \quad \Pi = \frac{1}{a} \cdot x' \cdot \sqrt{m}$$

und

$$b = a$$

nimmt. Dann wird aber die Gleichung (α.) die nachstehende

$$\partial x - x'' \cdot \sqrt{m} \cdot \partial x' - x' \cdot \sqrt{m} \cdot \partial x'' = 0.$$

Integrirt man nun dieselbe nach Anleitung des (§. 396. d. VI. Th. d. S.), so erhält man zuletzt das Integral

$$x - x' \cdot x'' \cdot \sqrt{m} = c,$$

welches aber nur eine einzige willkührliche Konstante enthält.

Entwickelt man aus dem oben gefundenen Integral nach (§. 444.) das allgemeine, indem man aus

$$x - \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot x'^2 - \tfrac{1}{2} \frac{m}{a} \cdot x''^2 = C_a$$

und

$$-\tfrac{1}{2} x'^2 + \tfrac{1}{2} \frac{m}{a^2} \cdot x''^2 = \partial C_a$$

a selbst eliminirt, während $C_a$ jede willkührliche Funktion von a vorstellt, so giebt dieses allgemeine Integral auch das so eben hier gefundene besondere Integral mit der einzigen Konstante c wieder, wenn man $C_a = c \cdot a^0 = c$ setzt.

nimmt. Weil aber dieselben Substitutionen aus (2′.) in (1′.), diese (1′.) auf folgende:

$$3') \qquad x'^2 \cdot x^m - ab \cdot \varphi \cdot \Pi \cdot X^2 + a \cdot \varphi \cdot X \cdot x^{\frac{1}{2}m} = 0$$

reduziren, so muß man zunächst

$$4') \qquad X = x^{\frac{1}{2}m}$$

machen, so wie

$$5') \qquad \varphi = x'^2,$$

wo sich dann

$$6') \qquad \Pi = \text{konstant} = 1$$

ausweiset. *) — Die Parzialgleichung selbst wird dadurch

$$7') \qquad 1 - ab + a = 0 \quad \text{oder} \quad b = \frac{a+1}{a}.$$

Die zu integrirende Gleichung (α.), nämlich

$$\alpha) \qquad \partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

wird nun

$$8') \qquad \partial x - a \cdot x'^2 \cdot x^{\frac{1}{2}m} \cdot \partial x' - \frac{a+1}{a} \cdot x^{\frac{1}{2}m} \cdot \partial x'' = 0;$$

und wenn man sie mit dem integrirenden Faktor $x^{-\frac{1}{2}m}$ multiplizirt und integrirt, so erhält man

$$9') \qquad \frac{x^{1-\frac{1}{2}m}}{1-\frac{1}{2}m} - \tfrac{1}{3}a \cdot x'^3 - \frac{a+1}{a} \cdot x'' = C,$$

als vollständiges Integral der gegebenen Parzialgleichung (1′.) mit den beiden willkührlichen Konstanten a und C.

Anmerkung 1. Beispiele des Verfahrens in (I.) findet man schon bei Euler. Das in (II. C. und D.) entwickelte Ver-

---

*) Hätte das zweite Glied der hier gegebenen Parzialgleichung noch eine Funktion von $x''$ zum Faktor gehabt, so daß z. B. die gegebene Parzialgleichung

$$x'^2 \cdot x^m - a^{x''} \cdot p' \cdot p'' + x^{\frac{1}{2}m} \cdot p' = 0$$

gewesen wäre, so hätte man $\varphi$ wie vorher angenommen, aber statt $\Pi$ nicht 1, sondern: 1 durch diese Funktion $a^{x''}$ dividirt. — Der Grund davon fällt in die Augen, in so ferne alles darauf ankommt, daß irgend wie die, nach der Substitution der Werthe für $p'$ und $p''$ aus der gegebenen Parzialgleichung hervorgehende, Gleichung identisch werde.

fahren kommt derjenigen Methode am nächsten, welche Lubbe in seinem „Lehrbegriff der höhern Körperlehre. Berlin 1828" gegeben hat. Hier erscheint jedoch dieselbe als ein spezieller Fall einer viel allgemeinern Methode. Uebrigens geben wir diese Methoden (im §. 453.) nicht deshalb, weil wir sie für besonders praktisch halten, sondern wir stellen sie nur in der Absicht hin, einmal, damit unsern Lesern die Ideen nicht verloren gehen, denen die Methoden ihr Daseyn verdanken; und dann, um sie versuchen zu können, wenn alle anderen Methoden bereits vergebens versucht worden sind.

Anmerkung 2. Man kann dies Verfahren auch leicht auf einzelne Parzialgleichungen der ersten Ordnung zwischen mehr als 3 Veränderlichen ausdehnen.

Ist nämlich unter der Voraussetzung, daß

1) $\partial x_{x'} = p'$; $\partial x_{x''} = p''$ und $\partial x_{x'''} = p'''$

gesetzt worden ist, die Parzialgleichung

2) $$P''' = f_{P',P''}$$

gegeben, wo $P'''$ bloß eine Funktion von $p'''$ und $x'''$ ist, wo dagegen $P''$ bloß $p''$ und $x''$, so wie $P'$ bloß $p'$ und $x'$ enthalten; so führe man sogleich 3 neue Veränderliche $a, b, c$ ein mittelst der 3 Gleichungen

3) $$P''' = c\,, \quad P'' = b\,, \quad P' = a\,,$$

und finde daraus

4) $p''' = Q'''_{c,x'''}$; $p'' = Q''_{b,x''}$ und $p' = Q'_{a,x'}$.

Dadurch geht aber die Gleichung

5) $$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' - p''' \cdot \partial x''' = 0,$$

welche doch hier allemal integrirt werden muß, über in

6) $$\partial x - Q'_{a,x} \cdot dx' - Q''_{b,x''} \cdot dx'' - Q'''_{c,x'''} \cdot dx''' = 0.$$

Der Gleichung (2.) wird nun genügt, wenn man

7) $$c = f_{a,b}$$

nimmt; und setzt man diesen Werth überall statt c, so wird die Gleichung (6.) noch integrabel, wenn man $p'$ und $p''$ so nimmt, daß a und b konstant werden; und sie giebt dann integrirt

8) $$x+C = \int Q'\cdot dx' + \int Q''\cdot dx'' + \int Q'''\cdot dx''',$$

wo statt c die Funktion $f_{a,b}$ steht, während a, b und C die 3 eingehenden willkührlichen Konstanten sind, so daß dieses Integral (8.) wiederum ein vollständiges ist.

Und aus diesem vollständigen Integral (8.), welches durch

9) $$V_{x,x',x'',x''',a,b,C} = 0$$

vorgestellt seyn mag, erhält man wieder durch Betrachtungen, welche den im (§. 444. II.) angestellten ganz analog sind, den Stellvertreter des allgemeinen Integrals, wenn man unter C eine willkürliche Funktion $C_{a,b}$ sich denkt, dann aus den 3 Gleichungen

10) $$V = 0; \quad \partial V_a + \partial V_c\cdot\partial C_a = 0 \quad \text{und} \quad \partial V_b + \partial V_C\cdot\partial C_b = 0$$

sowohl a, als auch b eliminirt.

Ist namentlich noch

$$P''' = p'''\cdot X''' ; \quad P'' = p''\cdot X'' \quad \text{und} \quad P' = p'\cdot X',$$

wo $X'''$ bloß eine Funktion von $x'''$, $X''$ bloß eine Funktion von $x''$, und $X'$ bloß eine Funktion von $x'$ ist, so wird das vollständige Integral jetzt

$$x+C = a\cdot\int\frac{1}{X'}\cdot dx' + b\cdot\int\frac{1}{X''}\cdot dx'' + f_{a,b}\cdot\int\frac{1}{X'''}\cdot dx'''.$$

Das allgemeine Integral ist also nun ausgesprochen in dem System der 3 Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} x+C_{a,b} = a\cdot\int\frac{1}{X'}\cdot dx' + b\cdot\int\frac{1}{X''}\cdot dx'' + f_{a,b}\cdot\int\frac{1}{X'''}\cdot dx''' \\ \partial C_a = \int\frac{1}{X'}\cdot dx' + \partial f_a\cdot\int\frac{1}{X'''}\cdot dx''' \\ \partial C_b = \int\frac{1}{X''}\cdot dx'' + \partial f_b\cdot\int\frac{1}{X'''}\cdot dx''' \end{array}\right\},$$

in welchem man unter C jede willkührliche Funktion von a und b, und aus welchem man dann sowohl a als auch b eliminirt sich denkt.

## §. 454.

Wir wollen nun schließlich noch einige der Verfahrungsarten

mittheilen, mittelst welcher Euler (der zuerst die Integration der Parzialgleichungen zur Sprache gebracht hat) das Integral der Parzialgleichungen der ersten Ordnung aufzufinden versuchte. Sie können als die ersten Anfänge des Integrirens der Parzialgleichungen betrachtet werden, und sind, dem Wesen nach, in folgenden zwei Untersuchungen anzuschauen.

I. Da man ein Integral der Parzialgleichung

1) $$F_{x;x';x'';p';p''}$$

allemal erhält, so oft man aus dieser Gleichung $p''$ findet, diesen Werth statt $p''$ in die Gleichung

2) $$\partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

substituirt, dann $p'$ so nimmt, daß diese letztere Gleichung integrabel wird, und solche dann integrirt; — so könnte man wohl auch von dieser Gleichung (2.) sogleich direkt das Integral nach allem dem t nehmen, worauf sich die bloßen $\partial$ in ihr beziehen, dabei aber theilweise integriren; und man erhielte sogleich, wie im (§. 453. I.) zu Anfang,

3) $$x - p' \cdot x' - p'' \cdot x'' + \int \left( x' + x'' \cdot \partial p''_{(p')} \right) \cdot dp' = 0$$

zum Integral, wo $x'$, $x''$, also auch $x$ und $p''$ als Funktionen von $p'$ gedacht sind *); wo $\partial p''_{(p')}$ die Ableitung bedeutet von der aus der (1.) für $p''$ hervorgehenden Funktion von $p'$, $x$, $x'$ und $x''$, nach allem $p'$ genommen, sowohl nach dem explizit vorkommenden, als auch nach dem $p'$, welches in $x$, in $x'$ und in $x''$ vorkommt, und wo endlich $\int (x' + x'' \cdot \partial p''_{(p')}) \cdot dp'$ das Integral bedeutet von $x' + x'' \cdot \partial p''_{(p')}$ nach allem $p'$ genommen.

---

*) Da nämlich $x$ als Funktion von $x'$ und $x''$ gesucht wird, so sind $p'$ und $p''$ offenbar, dem Wesen nach, Funktionen von $x'$ und $x''$. Weil aber in der Gleichung (2.) allemal $x'$ und $x''$ selbst wieder als Funktionen von t gedacht sind, so können auch $x$ und $p'$ als Funktionen von t erscheinen, und unter dieser Voraussetzung erscheinen dann je drei der 4 Veränderlichen $x$, $x'$, $x''$ und $p'$ als Funktionen der 4ten.

Weil aber $p'$ beliebig, jedoch so genommen werden muß, daß die Gleichung (2.) integrabel wird, so denke man sich eine beliebige Funktion $\varphi_{p'}$ von $p'$ allein, und nun $p'$ so genommen, daß der Gleichung

$$4) \qquad x' + x'' \cdot \partial p''_{(p')} = \partial \varphi_{p'};$$

genügt wird. Die Gleichung (3.) geht dann sogleich über in

$$5) \qquad x - p' \cdot x' - p'' \cdot x'' + \varphi_{p'} = 0.$$

Das System der beiden Gleichungen (4. und 5.), wenn man aus solchen $p'$ eliminirt sich denkt (nachdem vorher statt $p''$ sein aus $F = 0$ gezogener Werth in $p'$, $x$, $x'$ und $x''$ substituirt worden ist), ist daher in allen den Fällen als das allgemeine Integral der Parzialgleichung (1.) anzusehen, in welchen es gelingt, für irgend eine spezielle Funktion von $p'$, die statt $\varphi_{p'}$ gesetzt wird, aus der Gleichung (4.) $p'$ selbst, in $x'$, $x''$ ausgedrückt, zu finden.

Dies letztere ist aber offenbar der Fall, so oft die gegebene Gleichung $F = 0$, bloß eine Gleichung zwischen den beiden Ableitungen $\partial x_{x'}$ und $\partial x_{x''}$ allein, d. h. zwischen $p'$ und $p''$ allein, ist, ohne $x'$, $x''$ und $x$ selbst noch zu enthalten, so daß sie die Form

$$p'' = f_{p'}$$

annehmen kann, während $f_{p'}$ bloß $p'$ allein, und nicht mehr $x$, $x'$ oder $x''$ enthält.

II. Wäre aber, immer unter der Voraussetzung, daß die Ableitungen $\partial x_{x'}$ und $\partial x_{x''}$ beziehlich durch $p'$ und $p''$ bezeichnet werden, gegeben die Parzialgleichung

$$1) \qquad p'' = x' \cdot f_{p';x''} + \psi_{p';x''};$$

so würde die Gleichung

$$2) \qquad \partial x - p' \cdot \partial x' - p'' \cdot \partial x'' = 0$$

durch die Substitution von diesem Werth von $p''$ übergehen in

$$3) \qquad \partial x - p' \cdot \partial x' - x' \cdot f_{p';x''} \cdot \partial x'' - \psi_{p';x''} \cdot \partial x'' = 0.$$

Nimmt man nun von jedem Gliede dieser Gleichung das Integral, so erhält man

4) $x - p' \cdot x' + \int x' \cdot (\partial p' - f_{p';x''} \cdot \partial x'') \cdot dt - \int (\psi_{p';x''} \cdot \partial x'') \cdot dt = 0,$

wo die Integrale nach allem t genommen sind, sowohl nach dem, was in x', x'', als auch nach dem, was in p' steckt, in so ferne p' als Funktion von x' und x'', also nun auch als Funktion von t, gedacht werden muß.

Sucht man nun den integrirenden Faktor $\mu$ für die Funktion

$$\partial p' - f_{p';x''} \cdot \partial x'';$$

und wird dann

5) $$\int \mu \cdot (\partial p' - f_{p';x''} \cdot \partial x'') \cdot dt = \nu;$$

zieht man ferner aus dieser Gleichung, p' in x'' und $\nu$; bezeichnet man nachgehends

6) durch V das Integral $\int (\psi_{p';x''} \cdot \partial x'') \cdot dt,$

unter der Voraussetzung genommen, daß $\nu$ als konstant gedacht wird, so hat man

7) $$\int (\psi_{p';x''} \cdot \partial x'') \cdot dt = V - \int (\partial V_\nu \cdot \partial \nu_{x''}) \cdot \partial x'' \cdot dt,$$

wo das angezeigte Integral zur Rechten nach allem t genommen werden muß, (nach dem, was in $\nu$, und auch nach dem, was in x'' steckt). Die Gleichung (4.) wird dadurch folgende, nämlich:

8) $$x - p' \cdot x' - V + \int \left( \frac{x'}{\mu} + \partial V_\nu \right) \cdot d\nu = 0,$$

wo das angezeigte Integral nach allem $\nu$ genommen werden muß, auch nach dem, was in x'', in x' und in $\mu$ steckt.

Weil aber diese Gleichung ein wirklich herstellbares Integral seyn muß, ohne daß es nöthig wäre, zwischen x' und x'' selbst noch eine Relation anzunehmen, so denke man sich eine beliebige Funktion $\varphi_{\nu'}$ setze

9) $$\frac{x'}{\mu} + \partial V_\nu = \partial \varphi_{\nu'}$$

und hat dann statt der (8.) sogleich die Gleichung

10) $$x - p' \cdot x' - V + \varphi_\nu = 0$$

als Integral, so daß man aus den Gleichungen (5. 9. und 10.) nur noch $p'$ und $\nu$ eliminirt denken darf, um ein Integral der Parzialgleichung (1.) zu haben.

## Schluß-Anmerkung.

Wir können dieses Kapitel nicht schließen, ohne vorher noch einige Worte über den Zusammenhang zwischen der Integration der totalen und der Parzial-Gleichungen hinzugefügt zu haben.

Wir haben nämlich im (§. 347.) gesehen, daß, um die totale Gleichung

1) $$M \cdot \partial x + N \cdot \partial y = 0,$$

wo M und N gegebene Funktionen von x und y sind, zu integriren, man nur den integrirenden Faktor $\mu_{x,y}$ aufsuchen dürfe, um dann

2) $$\int \mu \cdot (M \cdot \partial x + N \cdot \partial y) \cdot dt = c$$

zum Integral der gegebenen Gleichung (1.) zu haben. Auch fanden wir daselbst, daß der integrirende Faktor $\mu$ aus der lineären Parzialgleichung

3) $$M \cdot \partial \mu_y - N \cdot \partial \mu_x + (\partial M_y - \partial N_x) \cdot \mu = 0$$

seine Bestimmung erhalten müsse. — Weil wir aber jetzt die lineären Parzialgleichungen nach den (§. §. 429—431.) vollständig zu integriren erlernt haben, so scheint es, als wenn wir nun diese zuletzt erworbenen Kenntnisse wiederum zur Vervollständigung jener Lehre der totalen Differenzialgleichungen benützen könnten.

Versucht man es aber, diese Parzialgleichung (3.) nach Anleitung des (§. 429.) zu integriren, so hängt alles davon ab, zunächst die beiden totalen Gleichungen

4) $$\frac{\partial y}{M} = -\frac{\partial x}{N} = -\frac{\partial \mu}{\partial M_y - \partial N_x}$$

zwischen den 3 Veränderlichen $y$, $x$ und $\mu$ nach (§. 281. d. V. Th. d. S.) zu integriren. Unter diesen beiden Gleichungen (4.)

befindet sich aber genau die gegebene Gleichung (1.), für welche der Faktor $\mu$ gesucht wird.

Ganz Analoges zeigt sich, wenn für die totale Gleichung

$$X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z = 0,$$

wo X, Y, Z Funktionen der 3 Veränderlichen x, y und z sind, der integrirende Faktor gesucht wird. Auch hier gelangt man zu zwei lineären Parzialgleichungen, und diese erfordern wieder zu ihrer Integration, die Integration solcher totalen Gleichungen, für welche der integrirende Faktor gesucht wird.

Es scheint also von der Integration der Parzialgleichungen, welche zur Bestimmung eines integrirenden Faktors einer totalen Gleichung gefunden werden, für die Integration der letztern nichts zu hoffen zu seyn, da in der Ausführung, die erstere Integration die letztere voraussetzt, wenigstens so lange die Methode des Lagrange angewandt werden soll.

# Höhere Zahlenlehre.

## Zwanzigstes Kapitel.

### Integrations = Versuche gegebener Parzialgleichungen der 2ten und höhern Ordnung in endlicher Form.

#### A. Integration solcher Parzialgleichungen, welche sich unmittelbar auf totale Differenzialgleichungen zurückführen lassen.

§. 455.

Ist gegeben die Gleichung

1) $$V = 0,$$

wo V eine Funktion von $x; y; \partial^n z_y; \partial^{n,1} z_{y,x}; \partial^{n,2} z_{y,x}; \cdots, \partial^{n,m} z_{y,x}$ ist, welche nicht z selbst enthält, so setze man

2) $$\partial^n z_y = u;$$

und die Funktion V wird sogleich in eine Funktion von x, y, $u, \partial u_x, \partial^2 u_x, \cdots \partial^m u_x$ übergehen; so daß die Gleichung $V = 0$ keine Parzialgleichung mehr ist, sondern eine totale Differenzialgleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und u.

Wird solche integrirt, so erhält man eine Urgleichung zwischen x, u und noch m willkührlichen Konstanten, welche natürlich auch y in sich aufgenommen haben können, also im Allgemeinen als eben so viele Funktionen von y angesehen werden müssen.

Hat man nun diese Gleichung nach u aufgelößt, und

3) $$u = u_{x,y,C_1,C_2,C_3,\cdots C_m}$$

gefunden, wo $C_1, C_2, C_3, \cdots C_m$ diese m willkührlichen Funktionen von y sind; und setzt man diesen Werth in die Gleichung (2.) statt u, so kann man, nach (§. 229—232. d. V. Th. d. S.), dann auch noch z dazu finden, indem man n mal hinter einander diese Funktion U nach allem y integrirt (wobei natürlich x als konstant angesehen werden muß).

Beispiel. Ist z. B. gegeben die Gleichung der 2ten Ordnung

1) $$\partial^{1,1}z_{x,y} + P\cdot\partial z_x = Q,$$

während P und Q bloß x und y, nicht aber z selbst enthalten sollen, so setzt man

2) $$\partial z_x = u,$$

und hat nun aus der (1.) sogleich

3) $$\partial u_y + P\cdot u = Q.$$

Diese totale Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen u und y ist lineär, kann nach (§. 362.) integrirt werden, und giebt also sogleich u mit einer willkührlichen Funktion von x (als willkührliche Konstante nach y). Die Gleichung (2.) liefert dann $z = \int u\cdot dx + \psi_y$ dazu, wo $\psi_y$ eine willkührliche Funktion von y ist. *)

Anmerkung. Die Gleichung

$$\partial^2 z_x + P\cdot\partial z_x = Q,$$

wenn auch P und Q Funktionen von x, y und z sind, ist doch

---

*) Für $P = 0$, d. h. wenn die zu integrirende Parzialgleichung bloß

$$\partial^{1,1}z_{x,y} = Q$$

ist, reduzirt sich dieses Resultat auf

$$z = \int\int Q\cdot dy\cdot dx + \int C_x\cdot dx + \psi_y,$$

während $\int C_x\cdot dx$ nichts weiter, als eine ganz willkührliche Funktion von x ist, welche auch durch $\varphi_x$ vorgestellt werden kann. (Vgl. §. 233. des V. Th. d. S.).

nur eine totale Differenzialgleichung zwischen zwei Veränderlichen. Daß der Buchstabe y in ihr noch vorkommt, ändert offenbar daran so wenig, als wenn noch mehr andere Buchstaben darin vorkommen. Integrirt man sie als eine totale Gleichung der 2ten Ordnung zwischen den beiden Veränderlichen x und z, so erhält man eine Gleichung zwischen z uud x, welche auch noch y enthalten wird, und welche zwei willkührliche Konstanten in sich aufnimmt, während in den letztern ebenfalls noch y vorkommen kann, so daß sie im Allgemeinen als willkührliche Funktionen von y angesehen werden müssen. — Daß man eine solche totale Differenzialgleichung, welche bloß Ableitungen nach einem einzigen Veränderlichen x enthält, auch als eine Parzialgleichung ansehen kann, indem man sich noch Ableitungen von y, mit Null-Koeffizienten versehen, hinzudenkt, versteht sich dabei von selbst.

## §. 456.

Es giebt auch solche Parzialgleichungen, wie die im vorhergehenden (§. 455.) behandelte, welche sich auf totale Differenzialgleichungen zwischen weniger Veränderlichen zurückführen lassen, während sie selber 4 und mehr Veränderliche enthalten.

Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$1) \qquad V = 0,$$

wo V eine Funktion von $u$, $x$, $y$, $\partial^{n,p} z_{x,y}$, $\partial^{n,p,1} z_{x,y,u}$, ... $\partial^{n,p,m} z_{x,y,u}$ ist; — so setze man

$$2) \qquad \partial^{n,p} z_{x,y} = w;$$

und die Funktion V geht sogleich in eine andere über, welche $u$, $x$, $y$, $w$, $\partial w_u$, ... $\partial^m w_u$ enthält, so daß die Gleichung $V = 0$ jetzt eine totale Differenzialgleichung zwischen w und u geworden ist, und, integrirt, w in u nebst noch n willkührlichen Konstanten, liefert, während diese letzteren ebenfalls x und y in sich aufnehmen können, demnach als eben so viele willkührliche Funktionen von x und y angesehen werden müssen.

Zu diesem w muß nun die Gleichung (2.) nach (§. §. 233—235. d. V. Th. d. S.) z dazu liefern, wodurch noch willkührliche

Funktionen von x und u, und auch willkührliche Funktionen von y und u eingehen.

## B. Integration der lineären Parzialgleichungen, der zweiten und höhern Ordnung.

### §. 457.

Betrachtet man aber diese andere spezielle Parzialgleichung der nten Ordnung

$$1)\quad A_0 \cdot \partial^n z_x + A_1 \cdot \partial^{n-1,1} z_{x,y} + A_2 \cdot \partial^{n-2,2} z_{x,y} + \cdots + A_{n-1} \cdot \partial^{1,n-1} z_{x,y} + A_n \cdot \partial^n z_y = 0,$$

in welcher $A_0, A_1, A_2, \cdots A_n$ konstant gedacht sind, so findet sich für sie sehr bald folgendes:

I. Genügen derselben mehrere Funktionen $z', z'', z'''$ ꝛc. ꝛc. von x und y, wenn solche statt z gesetzt werden, so genügt ihr auch $z = z' + z'' + z''' + \cdots$. — Dies folgt aus der lineären Form, in welcher die Ableitungen in der gegebenen Gleichung (1.) erscheinen, und gilt, die Koeffizienten mögen konstant seyn oder nicht.

II. Der Gleichung (1.) genügt offenbar jede beliebige ganze algebraische Funktion von x und y, welche von irgend einer niedrigern als der nten Ordnung ist, z. B.

$z = y + ax + b$, wenn $n > 1$;

$z = y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e$, wenn $n > 2$;

$z = y^3 + ay^2x + byx^2 + cx^3 + dy^2 + eyx + fx^2 + gy + hx + k$,

wenn $n > 3$ ist; u. s. w. f. — Denn es werden dann alle einzelnen Ableitungen $\partial^n z_x$, $\partial^{n-1,1} z_{x,y}$, ꝛc. ꝛc. der Null gleich. — Auch dies gilt, es mögen die Koeffizienten $A_0, A_1, \cdots A_n$ konstant seyn oder nicht.

III. Setzt man aber

$$z = \varphi_\omega,$$

und denkt man sich unter $\omega$ eine Funktion von x und y, welche algebraisch, ganz und von der ersten Ordnung ist, also

$$\omega = a \cdot y + b \cdot x + c,$$

so werden, wie wir so eben bemerkt haben, alle höhern als die ersten Ableitungen von $\omega$, sie mögen alle nach x allein, oder alle nach y allein, oder nach x und y untermischt genommen werden, allemal der Null gleich. — Deshalb wird dann bloß

$$\begin{aligned}
\partial^n z_{x_1} &= \partial^n \varphi_\omega \cdot \partial \omega_x^n &&= \partial^n \varphi_\omega \cdot b^n &&;\\
\partial^{n-1,1} z_{x,y} &= \partial^n \varphi_\omega \cdot \partial \omega_x^{n-1} \cdot \partial \omega_y &&= \partial^n \varphi_\omega \cdot b^{n-1} \cdot a &&;\\
\partial^{n-2,2} z_{x,y} &= \partial^n \varphi_\omega \cdot \partial \omega_x^{n-2} \cdot \partial \omega_y^2 &&= \partial^n \varphi_\omega \cdot b^{n-2} \cdot a^2 &&;\\
\vdots \quad &\quad \vdots \quad \vdots &&\quad \vdots \quad \vdots &&\\
\partial^n z_y &= \partial^n \varphi_\omega \cdot \partial \omega_y^n &&= \partial^n \varphi_\omega \cdot a^n &&;
\end{aligned}$$

weil alle die Glieder, welche (nach dem Kap. III. d. III. Th. d. S.) rechts noch stehen müßten, unter der jetzigen Voraussetzung der Null gleich werden.

Setzt man daher

$$z = \varphi_\omega \quad \text{und} \quad \omega = ay + bx + c,$$

so reduzirt sich die Gleichung (1.) auf

$$2) \quad A_0 \cdot b^n + A_1 \cdot b^{n-1} \cdot a + A_2 \cdot b^{n-2} \cdot a^2 + \cdots + A_n \cdot a^n = 0,$$

und wird daher identisch, so oft die Koeffizienten alle konstant sind, und man statt $\frac{b}{a}$ irgend einen der n Wurzelwerthe, welche die Gleichung

$$3) \quad A_0 \cdot m^n + A_1 \cdot m^{n-1} + A_2 \cdot m^{n-2} + \cdots + A_n = 0$$

für m liefert, und welche durch $m_1, m_2, m_3, \cdots m_n$ bezeichnet seyn mögen, nimmt.

IV. Es genügen daher der Gleichung (1.) die n Werthe von z, welche vorgestellt sind durch

$$\varphi'_{\omega'}; \quad \varphi''_{\omega''}; \quad \varphi'''_{\omega'''}; \cdots \varphi^{(n)}_{\omega^{(n)}};$$

wo $\omega', \omega'', \omega''', \cdots \omega^{(n)}$ die Werthe bedeuten, welche aus $a(y + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ hervorgehen, wenn statt $\frac{b}{a}$ die n Werthe $m_1, m_2, \cdots m_n$ gesetzt werden, und wenn man zu gleicher

Zeit statt $\frac{c}{a}$ beziehlich $c_1, c_2, \cdots c_n$, und zuletzt statt des Faktors a selbst beziehlich $a_1, a_2, \cdots a_n$ setzt; während $\varphi', \varphi'', \cdots \varphi^{(n)}$ ganz willkührliche Funktionen vorstellen.

V. Also wird der Gleichung (1.) auch genügt durch die Summe dieser n Werthe; so daß man hat

$$4) \quad z = \varphi'_{\omega'} + \varphi''_{\omega''} + \varphi'''_{\omega'''} + \cdots + \varphi^{(n)}_{\omega^{(n)}},$$

wo $\omega^{(a)} = a_a \cdot (y + m_a \cdot x + c_a)$ ist, und wo $a_a, c_a$ ganz willkührliche konstante Ausdrücke sind, wo aber $m_a$ die Wurzelwerthe der Gleichung (3.) vorstellen, und aus jener Gleichung gefunden werden müssen.

Und da dieser Werth (4.) n willkührliche Funktionen enthält, so hat er zu gleicher Zeit den Charakter des allgemeinen Integrals.

VI. Diese Allgemeinheit wird aber nicht vermindert, wenn auch aus den Ausdrücken $\omega', \omega'', \omega''', \cdots$ sowohl $a_a$ als auch $c_a$ weggelassen werden, so daß man bloß

$$\omega^{(a)} = y + m_a \cdot x$$

nimmt, so daß als allgemeines Integral der Gleichung (1.) gefunden ist die Gleichung:

$$5) \quad z = \varphi'_{y+m_1 \cdot x} + \varphi''_{y+m_2 \cdot x} + \varphi'''_{y+m_3 \cdot x} + \cdots + \varphi^{(n)}_{y+m_n \cdot x};$$

wenn nur $m_1, m_2, \cdots m_n$ die n Wurzelwerthe der Gleichung (3.) vorstellen.

VIII. Diese volle Allgemeinheit des Integrals (5.) ist aber nur so lange vorhanden, als die Gleichung (3.) wirklich lauter verschiedene Wurzelwerthe hat; und sie hört auf, sobald einige oder mehrere dieser Wurzelwerthe einander gleich werden.

Allein ganz auf dieselbe Art, wie bei den totalen lineären Gleichungen zwischen 2 Veränderlichen im (Kap. XVII. 1ste Abtheil. d. VI. Th. d. S.) verfahren worden ist, kann man auch

hier verfahren und nachweisen, daß das Integral (5.) seine volle Allgemeinheit wieder erlangt,

α) so oft zwei der Wurzelwerthe $m_a$ und $m_b$, also dann auch $\omega^{(a)}$ und $\omega^{(b)}$, einander gleich werden, wenn man an die Stelle der beiden Summanden $\varphi^{(a)}_{\omega(a)}$ und $\varphi^{(b)}_{\omega(b)}$ jetzt beziehlich die Summanden $\varphi^{(a)}_{\omega(a)}$; $x\cdot\varphi^{(b)}_{\omega(a)}$ setzt; und wenn man,

β) so oft drei der Wurzelwerthe $m_a$, $m_b$ nnd $m_c$, also auch die zugehörigen $\omega^{(a)}$, $\omega^{(b)}$, $\omega^{(c)}$ einander gleich werden, statt der 3 Summanden $\varphi^{(a)}_{\omega(a)}$, $\varphi^{(b)}_{\omega(b)}$, $\varphi^{(c)}_{\omega(c)}$ jetzt die Summanden

$$\varphi^{(a)}_{\omega(a)};\quad x\cdot\varphi^{(b)}_{\omega(a)};\quad x^2\cdot\varphi^{(c)}_{\omega(a)}$$

schreibt; u. s. w. f.

Ist $n = 2$; ist also die gegebene Parzial-Gleichung von der 2ten Ordnung, nämlich

$$A_0\cdot\partial^2 z_x + A_1\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + A_2\cdot\partial^2 z_y = 0,$$

wo $A_0$, $A_1$ und $A_2$ konstant vorausgesetzt werden, so ist demnach ihr allgemeines Integral

$$z = \varphi_{y+m_1\cdot x} + \psi_{y+m_2\cdot x};$$

wenn $m_1$ und $m_2$ die zwei verschiedenen Wurzelwerthe der Gleichung

$$A_0\cdot m^2 + A_1\cdot m + A_2 = 0$$

vorstellen. — Dagegen ist das allgemeine Integral derselben Parzialgleichung allemal

$$z = \varphi_{y+m\cdot x} + x\cdot\psi_{y+m\cdot x},$$

so oft $m_1 = m_2 = m$ wird *); während jedesmal $\varphi$ und $\psi$ zwei will-

---

*) Daher hat die Parzialgleichung $\partial^2 z_x + \partial^2 z_y = 0$ das allgemeine Integral $z = \varphi_{y+x\cdot\sqrt{-1}} + \psi_{y-x\cdot\sqrt{-1}}$. — Eben so hat die Parzialgleichung

$$\partial^2 z_x - c^2\cdot\partial^2 z_y = 0$$

das allgemeine Integral

$$z = \varphi_{y+c\cdot x} + \psi_{y-c\cdot x}. —$$

führliche Funktionen vorstellen; wenn nur die Koeffizienten $A_0$, $A_1$, $A_2$ wirklich konstant sind.

## §. 458.

Nehmen wir nun zunächst die lineäre Gleichung der 2ten Ordnung von der Form

$$1) \qquad R\cdot\partial^2 z_x + S\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + T\cdot\partial^2 z_y = V,$$

wo R, S, T und V gegebene Funktionen von x, y, z, $\partial z_x$ und $\partial z_y$ vorstellen, und welche wir bereits im (§. 322. d. V. Th. d. S.) behandelt haben. — Führt man neue Veränderliche p und q mittelst der Gleichungen

$$2) \qquad \partial z_x = p \qquad \text{und} \qquad 3) \quad \partial z_y = q$$

ein, denkt man sich x und y, also auch z und p und q selber wieder als Funktionen eines neuen Veränderlichen t; nimmt man dann von den Gleichungen (2. und 3.) die Ableitungen nach allem t, so daß man erhält

$$4) \qquad \partial^2 z_x\cdot\partial x + \partial^{1,1} z_{x,y}\cdot\partial y = \partial p$$

und

$$5) \qquad \partial^{1,1} z_{x,y}\cdot\partial x + \partial^2 z_y\cdot\partial y = \partial q;$$

findet man endlich hieraus die Werthe von $\partial^2 z_x$ und $\partial^2 z_y$, um solche in die Gleichung (1.) zu substituiren, so geht letztere über in

$$6) \quad R\cdot\partial p\cdot\partial y + T\cdot\partial q\cdot\partial x - V\cdot\partial x\cdot\partial y =$$
$$\partial^{1,1} z_{x,y}\cdot(R\cdot\partial y^2 - S\cdot\partial x\cdot\partial y + T\cdot\partial x^2);$$

welche Gleichung nun durch die für z, p und q gesuchten Funktionen von x und y identisch werden muß.

Monge hat nun, im Sinne des von ihm für die lineären Parzialgleichungen der ersten Ordnung genommenen und hier im

---

Dagegen hat die Parzialgleichung

$$\partial^2 z_x - 2c\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + c^2\cdot\partial^2 z_y = 0$$

das allgemeine Integral

$$z = \varphi_{y+c\cdot x} + x\cdot\psi_{y+c\cdot x}.$$

(§. 451.) beschriebenen Ganges, dieser Gleichung (6.) dadurch zu genügen gesucht, daß er jede Seite derselben für sich der Null gleich setzt; also daß man erhält

$$7)\quad \left\{\begin{matrix} R\cdot\partial y^2 - S\cdot\partial x\cdot\partial y + T\cdot\partial x^2 = 0 \\ R\cdot\partial\mu\cdot\partial y + T\cdot\partial q\cdot\partial x - V\cdot\partial x\cdot\partial y = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Verbindet man nun damit die, vermöge der (2. und 3.) allemal existirende, Gleichung

$$8)\quad \partial z - p\cdot\partial x - q\cdot\partial y = 0,$$

so hat man 3 totale Gleichungen zwischen den 5 Veränderlichen x, y, z, p und q.

Findet man nun aus der erstern der Gleichungen (7.) zunächst

$$9)\quad \partial y = m\cdot\partial x,$$

wo m eine Funktion der 5 Veränderlichen x, y, z, p und q seyn wird, gegeben durch die Gleichung

$$10)\quad R\cdot m^2 - S\cdot m + T = 0;$$

und substituirt man dann für $\partial y$ den Werth $m\cdot\partial x$ in die 2te der Gleichungen (7.), so erhält man

$$11)\quad Rm\cdot\partial p + T\cdot\partial q - Vm\cdot\partial x = 0.$$

Endlich wird die Gleichung (8.) vermöge derselben Substitution jetzt

$$12)\quad \partial z - (p + qm)\cdot\partial x = 0;$$

so daß an die Stelle der zu integrirenden Gleichungen (7. und 8.) jetzt die Gleichungen (9. — 12.) getreten sind.

Gelingt es nun, aus diesen 3 Gleichungen (9. 11. 12.), etwa dadurch, daß man abwechselnd den einen der Veränderlichen oder den andern, nebst seiner Ableitung eliminirt, zwei integrirbare Gleichungen

$$13)\quad G = 0 \quad \text{und} \quad H = 0$$

abzuleiten, aus denen man zwei Integrale erhält, die, nach den beiden eingehenden willkührlichen Konstanten a und b algebraisch aufgelößt, die Form

14) $M_{x,y,z,p,q} = a$ und $N_{x,y,z,p,q} = b$

annehmen; — so kann man wieder a und b als neue Veränderliche einführen, bestimmt durch diese Gleichungen (14); letztere Gleichungen nach allem t differenziiren, daraus ∂p und ∂q finden, (in ∂x, ∂y, ∂z, ∂a und ∂b ausgedrückt), und diese Werthe in die Gleichung (6.) substituiren. Diese letztere wird dann, weil ihr a und b als konstant, also $\partial a = \partial b = 0$ bereits genügen, nothwendig die Form

15) $A \cdot \partial a^2 + B \cdot \partial a \cdot \partial b + C \cdot \partial b^2 = 0,$

oder die Form

$$\partial b = \omega \cdot \partial a$$

annehmen, wo $\omega$ unter anderem auch die Ableitung $\partial^{1,1} z_{x,y}$ in sich schließt. Da man nun letztere beliebig, aber doch so nehmen soll, daß die Gleichung (6.) d. h. die Gleichung (15.) integrabel wird, so darf man nur, wenn $\psi_a$ eine ganz willkührliche Funktion von a vorstellt, $\omega = \partial\psi_a$ nehmen, um die Gleichung (6. oder 15.) integrabel gemacht, und ihr Integral selbst, wie folgt, nämlich

16) $$b = \psi_a$$

oder

(⊙)··· $$N = \psi_M$$

gefunden zu haben. *)

Anmerkung 1. Da dieses Integral (⊙) in der Regel außer x, y, z auch noch p und q enthalten wird, so ist solches in der Regel ein erstes Integral. Diese Methode setzt also die Existenz eines ersten Integrals voraus. Aber, unter dieser Voraussetzung, ist der im (§. 322. d. V. Th. d. S.) für lineäre und nicht lineäre Gleichungen beschriebene Weg, als der direktere, vorzuziehen. —

---

*) Daß $N = \psi_M$ der gegebenen Parzialgleichung genügt, läßt sich natürlich auch à posteriori nachweisen.

Daß endlich die im (§. 322. d. V. Th. d. S.) erwähnte Bedingungsgleichung der Existenz eines ersten Integrals erfüllt seyn müsse, wenn die hiesigen Gleichungen (14.) als Integrale der Gleichungen (13.) existiren sollen, ist dabei ebenfalls nicht zu bezweifeln.

Anmerkung 2. Aus dem gefundenen Integral $N = \psi_M$ kann zufällig p und q selbst herausfallen. Dann ist solches zugleich ein Ur-Integral, aber nur mit einer einzigen willkührlichen Funktion, daher nicht allgemein genug.

Anmerkung 3. In jedem Falle bekommt man durch das Verfahren unsers gegenwärtigen (§.) entweder kein Integral, oder in der Regel deren zwei, weil m aus der Gleichung (10.) in der Regel zwei verschiedene Werthe annimmt, deren jeder genommen werden kann.

Beispiel I. Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$1) \qquad A \cdot \partial^2 z_x + B \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + C \cdot \partial^2 z_y = V,$$

wo A, B, C konstant sind, wo aber V eine Funktion von x und y ist, so ist hier m konstant und gegeben durch die Gleichung

$$2) \qquad A \cdot m^2 - B \cdot m + C = 0.$$

Die beiden Gleichungen $M = a$ und $N = b$ werden dasmal

$$3) \qquad \left\{ \begin{matrix} y - m \cdot x = a \\ Am \cdot p + C \cdot q - m \cdot U = b \end{matrix} \right\},$$

wenn unter U die Funktion von x und y verstanden wird, welche aus $\int V \cdot dx$ hervorgeht, wenn man in V vor der Integration statt y seinen Werth $m \cdot x + a$ setzt, dann nach allem x integrirt, nach der Integration aber statt a wiederum seinen Werth $y - m \cdot x$ schreibt.

Sind nun $m'$ und $m''$ die beiden Werthe von m aus der Gleichung (2.), und stellen $U'$ und $U''$ die beiden zugehörigen Werthe von U vor, so sind die beiden ersten Integrale der Gleichung (1.) jetzt folgende:

$$\odot\cdots \qquad \left\{ \begin{matrix} 4) \quad Am' \cdot \partial z_x + C \cdot \partial z_y - m' \cdot U' = \varphi'_{y - m' \cdot x} \\ 5) \quad Am'' \cdot \partial z_x + C \cdot \partial z_y - m'' \cdot U'' = \varphi''_{y - m'' \cdot x} \end{matrix} \right\},$$

wo $\varphi'$ und $\varphi''$ willkührliche Funktionen vorstellen. *)

---

*) Da jede dieser Gleichungen wiederum eine lineäre Parzialgleichung der ersten Ordnung ist, so kann sie nach (§. 429.) auf's neue integrirt werden. — Versucht man dieses mit der Gleichung (4.), und denkt man daran, daß

$$m' \cdot m'' = \frac{C}{A}, \quad \text{also} \quad m'' = \frac{C}{A \cdot m'} \quad \text{ist,}$$

so daß die Gleichung (4.), wenn man sie durch $A \cdot m'$ wegdividirt, sogleich die Form

$$1) \qquad \partial z_x + m'' \cdot \partial z_y - \frac{1}{A} \cdot U' = \varphi'_{y - m' \cdot x}$$

annehmen kann (in so fern $\frac{1}{A \cdot m'}$ sogleich mit in $\varphi'$ hinein genommen gedacht wird), so hängt nach (§. 429.) die Integration dieser Gleichung ab von der Integration der totalen Gleichungen

$$2) \qquad \frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{m''} = \frac{\partial z}{\varphi'_{y - m' \cdot x} + \frac{1}{A} \cdot U'}.$$

Die erstere dieser Gleichungen, integrirt, giebt

$$3) \qquad y = m'' \cdot x + a'.$$

Denkt man sich nun diesen Werth $m'' \cdot x + a'$ statt $y$ in die andere der beiden Gleichungen (2.) substituirt, und das, was dadurch aus $U$ wird, durch $U'_{x,a'}$ bezeichnet, so erhält man noch das zweite Integral der Gleichungen (2.) wie folgt, nämlich

$$4) \qquad z = \frac{1}{A} \cdot \int U'_{x,a'} \cdot dx + \psi_{a' + (m'' - m') \cdot x} + b',$$

wenn $\int \varphi'_v \cdot \partial v = \psi_v$ gesetzt, und der Faktor $\frac{1}{m'' - m'}$ sogleich mit in die willkührliche Funktion $\psi$ hinein gezogen wird.

Findet man daher aus (3.) die Konstante $a'$, und setzt man diesen Werth in die (4.), um die Konstante $b'$ finden zu können, so findet sich endlich aus (§. 429.) das Integral selbst so, nämlich $b' = \varphi_{a''}$, d. h.

$$z - \frac{1}{A}\left[\left(\int U'_{x,a'} \cdot dx\right)_{a'}\right]_{y - m'' \cdot x} = \psi_{y - m' \cdot x} + \varphi_{y - m'' \cdot x}.$$

Ist noch spezieller $V = x \cdot y$ gegeben, so wird

$$U' = \tfrac{1}{3} m' \cdot x^3 + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot (y - m' \cdot x);$$
$$U'_{x,a'} = \tfrac{1}{3} m' \cdot x^3 + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot [(m'' - m')x + a'];$$

Beispiel. 2. Bei der Integration der Parzialgleichung

1) $$x^2 \cdot \partial^2 z_x + 2xy \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + y^2 \cdot \partial^2 z_y = 0$$

wird

2) $$m = m' = m'' = \frac{y}{x};$$

und die Gleichungen des (§. 458. N. N. 9—12.) werden jetzt folgende, nämlich

3) $$\left\{\begin{array}{rl} \partial y - \frac{y}{x} \cdot \partial x & = 0 \\ x \cdot \partial p + y \cdot \partial q & = 0 \\ \partial z - p \cdot \partial x - q \cdot \partial y & = 0 \end{array}\right\}.$$

Da nun von diesen 3 Gleichungen die erstere, integrirt,

4) $$y = ax \quad \text{oder} \quad \frac{y}{x} = a$$

liefert; und die zweite derselben dadurch in

$$\partial p + a \cdot \partial q = 0$$

übergeht, daher, integrirt, sogleich

5) $$p + a \cdot q = b \quad \text{oder} \quad p + q \cdot \frac{y}{x} = b$$

liefert, so hat man sogleich als erstes Integral der Gleichung (1.) die folgende Gleichung

(⊙)... $$\partial z_x + \frac{y}{x} \cdot \partial z_y = \varphi_{y:x}.$$ *)

---

und das allgemeine Ur-Integral der Parzialgleichung

$$A \cdot \partial^2 z_x + B \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + C \cdot \partial^2 z_y = x \cdot y,$$

wird daher jetzt folgendes:

$$z = \frac{1}{6A} \cdot x^3 y - \tfrac{1}{24} \cdot \frac{B}{A} \cdot x^4 + \varphi_{y - m' \cdot x} + \psi_{y - m'' \cdot x}.$$

Und ist $V = 0$, so kommt man auf das Resultat des (§. 457.) zurück.

*) Integrirt man diese Gleichung noch einmal, in so ferne sie eine lineäre Parzialgleichung der ersten Ordnung ist, nach (§. 429.), so erhält man sogleich als Ur-Integral der oben gegebenen Parzialgleichung (1.) folgendes:

$$z = \psi_{y:x} + x \cdot \varphi_{y:x}.$$

Beispiel 3. Ist gegeben die Parzialgleichung

1) $\partial z_y^2 \cdot \partial^2 z_x - 2\partial z_x \cdot \partial z_y \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + \partial z_x^2 \cdot \partial^2 z_y = 0$,

so erhält man

2) $m = m' = m'' = -\frac{\partial z_x}{\partial z_y}$,

3) $p \cdot \partial x + q \cdot \partial y = 0$ oder $\partial z = 0$ und 4) $q \cdot \partial p - p \cdot \partial q = 0$;

also

5) $z = a$; 6) $p = b \cdot q$ oder 7) $b = \frac{p}{q}$.

Demnach ist ein erstes Integral der Parzialgleichung (1.) jetzt gefunden, nämlich

(⊙)... $\frac{\partial z_x}{\partial z_y} = \varphi_z$ oder $\partial z_x = \varphi_z \cdot \partial z_y$. *)

Beispiel 4. Ist gegeben die Parzialgleichung

1) $(1 + \partial z_y^2 + \partial z_x \cdot \partial z_y) \cdot \partial^2 z_x$

$+ (\partial z_y^2 - \partial z_x^2) \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} - (1 + \partial z_x^2 + \partial z_x \cdot \partial z_y) \cdot \partial^2 z_y = 0$;

und führt man hier wieder die neuen Veränderlichen p und q ein; setzt man aber noch überdies

2) $p + q = \alpha$,

so finden sich die beiden Werthe von m jetzt:

3) $m' = 1$ und 4) $m'' = -\frac{1 + p \cdot \alpha}{1 + q \cdot \alpha}$.

Man hat also zu integriren, wenn man den Werth $m = m''$ zu-

---

*) Soll nun dieses erste Integral, als lineäre Parzial-Differenzialgleichung der ersten Ordnung, auf's neue (nach §. 429.) integrirt werden, so muß man sich die Gleichungen bilden

8) $\frac{\partial x}{1} = -\frac{\partial y}{\varphi_z} = \frac{\partial z}{0}$;

d. h. 9) $\partial z = 0$; 10) $z = a$ und 11) $\varphi_a \cdot \partial x + \partial y = 0$;

also 12) $\varphi_a \cdot x + y = b$ oder 13) $b = x \cdot \varphi_z + y$.

Folglich ist nach (§. 429.)

(♀)... $x \cdot \varphi_z + y = \psi_z$

das Ur-Integral der gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung

nächst im Auge hat, nach (§. 458.) die Gleichungen

5) $(1+q\cdot\alpha)\cdot\partial y+(1+p\cdot\alpha)\cdot\partial x=0$ und 6) $\partial p+\partial q=\partial\alpha=0$.

Die letztere giebt

7) $$p+q=\alpha=b;$$

und die erstere, nämlich die Gleichung (5.), wird dann

8) $\partial y+\partial x+b\cdot(p\cdot\partial x+q\cdot\partial y)=0$ oder 9) $\partial y+\partial x+b\cdot\partial z=0$;

giebt daher, integrirt,

10) $y+x+b\cdot z=a$ oder 11) $y+x+(p+q)\cdot z=a$.

Also ist ein erstes Integral der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung folgendes:

(⊙)··· $$y+x+(p+q)\cdot z=\varphi_{p+q}'$$

d. h. $$y+x+z\cdot(\partial z_x+\partial z_y)=\varphi_{(\partial z_x+\partial z_y)}'$$

wo $\varphi$ eine willkührliche Funktion (von $p+q$) vorstellt. *)

Integrirt man aber das erstere System der Gleichungen (§. 458. N. N. 9—12.), welches sich für $m=m'=1$ ergiebt, nämlich die Gleichungen

12) $\partial y-\partial x=0$ und 13) $(1+q\cdot\alpha)\cdot\partial p+(1+p\cdot\alpha)\cdot\partial q=0$,

so erhält man aus der erstern sogleich

14) $$y-x=a.$$

Um die zweite dieser Gleichungen zu integriren, ist es bequem, auch noch

15) $$p-q=\beta$$

zu setzen, so daß sie (weil nun $p=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $q=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ wird) diese Form

16) $$\frac{\partial\beta}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\partial\alpha}{2+\alpha^2}$$

annimmt, und integrirt,

17) $$\beta=b\cdot\sqrt{2+\alpha^2}$$

giebt. Daraus zieht man aber wiederum ein erstes Integral der gege-

---

*) Wollte man dieses erste Integral noch einmal integriren als Parzialgleichung der 1sten Ordnung nach (§. 429.), so ginge dieß offenbar nicht, so lange nicht die Funktion $\varphi$ partikularisirt wird. Also müßte man für jede andere Funktion, welche statt $\varphi$ gesetzt wird, jedesmal auf's neue das Ur-Integral finden.

benen Parzialgleichung der 2ten Ordnung, nämlich

$$(\mathfrak{C})\ldots\quad \frac{p-q}{\sqrt{2+(p+q)^2}} = \psi_{x-y} \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial z_x - \partial z_y}{\sqrt{2+(\partial z_x+\partial z_y)^2}} = \psi_{x-y}.$$ *)

Soll von dieser Gleichung ($\mathfrak{C}$) wiederum das Integral gefunden werden, so führe man wieder $\alpha$ und $\beta$ so ein, daß

$$p = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \quad \text{und} \quad q = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

wird, und dieses erste Integral selbst diese Gestalt annimmt

$$\frac{\beta}{\sqrt{2+\alpha^2}} = \psi_{x-y}.$$

Die Gleichung

$$\partial z = p\cdot\partial x + q\cdot\partial y$$

wird dadurch

$$\partial z = \tfrac{1}{2}\alpha\cdot(\partial x+\partial y)+\tfrac{1}{2}\beta\cdot(\partial x-\partial y);$$

oder, wenn man statt $\beta$ seinen Werth setzt,

$$\partial z = \tfrac{1}{2}\alpha\cdot(\partial x+\partial y)+\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\alpha^2}\cdot\psi_{x-y}\cdot\partial(x-y).$$

Und da diese Gleichung, für $\alpha$ konstant, integrabel ist, und, integrirt,

$$z+C = \tfrac{1}{2}\alpha\cdot(x+y)+\sqrt{2+\alpha^2}\cdot\psi_{x-y}$$

liefert, wenn $\frac{1}{2}\int\psi_v\cdot\partial v$ wiederum durch $\psi_v$ bezeichnet wird, so führt sie nach (§. 453.) zu dem System der beiden Gleichungen

$$(\mathfrak{Q})\ldots\quad \left\{\begin{array}{l} z+\varphi_\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha\cdot(x+y)+\sqrt{2+\alpha^2}\cdot\psi_{x-y} \\ \partial\varphi_\alpha = \tfrac{1}{2}(x+y)+\dfrac{\alpha}{\sqrt{2+\alpha^2}}\cdot\psi_{x-y} \end{array}\right\},$$

welche, wenn man sich $\alpha$ eliminirt denkt, das gesuchte Ur-Integral bilden.

Anmerkung. Hat man von einer Parzialgleichung der 2ten Ordnung zwei erste Integrale gefunden, so kann man aus

---

*) Dasselbe Resultat für dasselbe Beispiel ist bereits im (§. 322. d. V. Th. d. S.) nach der dortigen direkten Methode gefunden. Aber auch das erstere Resultat (d. h. die oben gefundene Gleichung

$$y+x+(p+q)\cdot z = \varphi_{p+q}$$

findet sich bei dem Verfahren des (§. 322. d. V. Th. d. S.) unmittelbar. (Vgl. Beisp. 4. zu §. 472.)

ihnen $\partial z_x$ und $\partial z_y$ in x, y und z ausgedrückt finden, und diese Werthe in die Gleichung

$$\partial z - \partial z_x \cdot \partial x - \partial z_y \cdot \partial y = 0$$

statt $\partial z_x$ und $\partial z_y$ substituiren, nachgehends aber diese Gleichung nach Anleitung der (§§. 396. 402. 406. d. VI. Th. d. S.) integriren, und man wird ebenfalls das Ur-Integral der gegebenen Parzialgleichung erhalten — Man kann aber auch (§. 296. d. V. Th. d. S.) dazu anwenden.

In dem vorliegenden (Beisp. 1.) fände sich, wenn $A = 1$ und $V = xy$ wäre, aus den beiden Resultaten (⊙) daselbst, wenn die willkührlichen Funktionen $\varphi'_\omega$ und $\varphi''_{\omega'}$ beziehlich durch $\partial\varphi_\omega$ und $\partial\psi_{\omega'}$ vorgestellt werden, sogleich

$$1) \qquad q = \partial z_y = \tfrac{1}{6}x^3 + \frac{1}{m' - m''} \cdot (\partial\varphi_\omega + \partial\psi_{\omega'}),$$

wenn nur $\omega = y - m' \cdot x$, dagegen $\omega' = y - m'' \cdot x$ gedacht wird. Ferner ist dann

$$2) \quad p = \partial z_x = \tfrac{1}{6}[3x^2 \cdot y - (m' + m'') \cdot x^3] + \frac{1}{m' - m''} \cdot (m' \cdot \partial\varphi_\omega + m'' \cdot \partial\psi_{\omega'}).$$

Integrirt man nun die (1.), so erhält man

$$z = \int q \cdot dy + C_x$$

oder

$$z = \tfrac{1}{6}x^3 \cdot y + \frac{1}{m' - m''} \cdot (\varphi_\omega + \psi_{\omega'}) + C_x. \quad *)$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (2.), um die Gleichung zur Bestimmung von $C_x$ zu erhalten, so hat man

$$\partial C_x = -\tfrac{1}{6} \cdot (m' + m'') \cdot x^3 \quad \text{d. h.} \quad C_x = -\tfrac{1}{24} \cdot (m' + m'') \cdot x^4;$$

so daß man z wiederum mit dem, in der Note zu dem angeführten (Beisp. 1.) bereits erhaltenen, Resultate übereinstimmend gefunden hat.

## §. 459.

Spezialisiren wir diese Gleichung des (§. 458.) noch weiter, und denken wir sie uns in der Form

---

*) Weil, in so ferne man hier $\partial y_\omega = 1$ hat,

$$\int \partial\varphi_\omega \cdot dy = \int (\partial\varphi_\omega \cdot \partial y_\omega) \cdot d\omega = \int \partial\varphi_\omega \cdot d\omega = \varphi_\omega \qquad \text{ist.}$$

1) $R \cdot \partial^2 z_x + S \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + T \cdot \partial^2 z_y + P \cdot \partial z_x + Q \cdot \partial z_y + N \cdot z = M$,

indem wir R, S, T, P, Q, N und M als bloße Funktionen von x und y allein ansehen, so sind nach der Methode des (§. 458.), wenn man sie hier anwenden will, zu integriren die 3 Gleichungen (9.—12. des §. 458.), nämlich jetzt

2) $\partial y - m \cdot \partial x = 0$,

3) $Rm \cdot \partial p + T \cdot \partial q + (P \cdot p + Q \cdot q + N \cdot z - M) \cdot m \cdot \partial x = 0$

und 4) $\partial z - p \cdot \partial x - q \cdot \partial y = 0$.

Man kann nun in diesem speziellern Fall zunächst die Bedingungen aufsuchen, unter denen die Gleichungen (2.—4.) zwei Integrale von der Form

$$M = a \quad \text{und} \quad N = b$$

zulassen. Dies geschieht, wie folgt.

Die Gleichung (2.), nämlich

$$\partial y - m \cdot \partial x = 0,$$

da m bloß x und y enthält, muß man als integrabel ansehen, so daß man y in x, oder x in y ausdrücken kann. Substituirt man aber den so gefundenen Werth $y_x$ statt y in die Gleichung (3.), so wird die neue Gleichung bloß noch die 4 Veränderlichen x, z, p und q enthalten, während die Gleichung (4.) diese Form

5) $$\partial z = (p + mq) \cdot \partial x$$

annehmen kann. — Diese beiden Gleichungen (3.) und (5.), welche bloß noch die 4 Veränderlichen x, z, p und q enthalten, kann man nun gleichzeitig zu integriren versuchen.

Multiplizirt man zu dem Ende die (3.) mit $\mu$, die (5.) dagegen mit $\mu'$, und addirt man die Resultate, so ergiebt sich

6) $$\begin{cases} \mu Rm \cdot \partial p + \mu T \cdot \partial q + \mu' \cdot \partial z \\ + [(\mu mP - \mu') \cdot p + (\mu mQ - \mu' m) \cdot q + \mu mN \cdot z - \mu mM] \cdot \partial x = 0. \end{cases}$$

Das Integral dieser Gleichung, wenn ein solches existirt, kann bloß die Form

7) $$\alpha \cdot p + \beta \cdot q + \gamma \cdot z + \delta = b$$

haben, wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ unbekannte Funktionen von x, y und z sind, während b eine willkührliche Konstante vorstellt.

Differenziirt man nun diese Gleichung (7.), und vergleicht man das Resultat mit der Gleichung (6.), mit welcher es zusammenfallen muß, so erhält man

8) $\mu Rm = \alpha$; 9) $\mu T = \beta$; 10) $\mu' = \gamma$;

also 11) $\partial(\mu Rm) = (\mu mP - \mu')\cdot\partial x$;

12) $\partial(\mu T) = (\mu mQ - \mu' m)\cdot\partial x$;

13) $\partial\mu' = \mu mN\cdot\partial x$;

14) $\partial\delta = -\mu mM\cdot\partial x$.

Aus diesen 7 Gleichungen sollen nun die 6 unbekannten Funktionen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\mu$ und $\mu'$ gefunden werden; und eliminirt man alle 6 aus diesen 7 Gleichungen, oder, was dasselbe ist, eliminirt man $\mu$ und $\mu'$ aus den 3 Gleichungen (11. 12. und 13.), so erhält man die Bedingungsgleichung, welche von den gegebenen Koeffizienten R, S, T, P, Q, N und M erfüllt seyn muß, wenn das Integral (7.) möglich seyn soll. —

Man findet leicht

15) $$\frac{\partial\mu}{\mu} = \frac{[mP\cdot\partial x - Q\cdot\partial x - \partial(Rm)]\cdot m + \partial T}{Rm^2 - T},$$

welches integrabel ist, weil $y_x$ bereits statt y gesetzt worden. Ferner findet man dann

16) $$\mu' = \mu mP - \partial(\mu Rm)_x.$$

Man erhält daher die Bedingungsgleichung der Existenz des Integrals (7.) jetzt noch dadurch, daß man aus den beiden Gleichungen

17) $\partial(\mu Rm^2) - \partial(\mu T) = (mP - Q)\cdot m\mu\cdot\partial x$

18) $\partial x\cdot\partial(\mu mP) - \partial^2(\mu Rm) = \mu mN\cdot\partial x^2$

die Funktion $\mu$ selbst eliminirt.

Ist aber das Integral der Gleichung (2.) mit der willkührlichen Konstante a gefunden, diese letzt erwähnte Bedingungsgleichung erfüllt, und auch noch das Integral (7.) gefunden, so kann

man wieder diese beiden Integrale nach den Konstanten a und b algebraisch auflösen, also auf die Form

$$M' = a \quad \text{und} \quad N' = b$$

bringen; das Verfahren des (§. 458.) findet wieder statt; und

$$N' = \varphi_{M'}$$

ist das gesuchte erste Integral der gegebenen Parzial-Differenzialgleichung der 2ten Ordnung. *)

Beispiel 1. Wenden wir dieses auf den Fall an, wo alle Koeffizienten R, S, T, P, Q, N konstant sind, und nur M allein eine Funktion von x und y bleibt. Dann ist m konstant, und

$$y = y_x = m \cdot x + a.$$

Die Gleichungen (17. und 18.) werden jetzt

$$(Rm^2 - T) \cdot \partial\mu = (mP - Q) \cdot m\mu \cdot \partial x;$$

$$P \cdot \partial x \cdot \partial\mu - R \cdot \partial^2\mu = \mu \cdot N \cdot \partial x^2.$$

Macht man nun der Kürze wegen

$$\frac{(mP - Q) \cdot m}{Rm^2 - T} = n,$$

so giebt die erstere dieser beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\mu}{\mu} = n \cdot \partial x, \quad \text{also} \quad \mu = e^{nx}.$$

Setzt man nun diesen Werth von $\mu$ in die 2te der gedachten Gleichungen, so erhält man die Bedingungsgleichung

(♂)... $$Pn - Rn^2 = N.$$

Ist diese Bedingungsgleichung erfüllt, so findet sich weiter

$$\mu' = m(P - nR) \cdot e^{nx};$$

$$\alpha = mR \cdot e^{nx}; \qquad \beta = T \cdot e^{nx};$$

$$\gamma = m(P - nR) \cdot e^{nx} \quad \text{und} \quad \delta = -m \cdot \int M \cdot e^{nx} \cdot dx;$$

wo man nur nicht vergessen muß, daß vorher überall statt y sein Werth $m \cdot x + a$ gesetzt gedacht worden ist.

---

*) Man übersehe jedoch nicht, daß auch hier die Existenz eines ersten Integrals vorausgesetzt wird, und daß, unter dieser Voraussetzung, die Methode des (§. 322. d. V. Th. d. S.) direkter zum Ziele führt.

Die beiden Integrale $M' = a$ und $N' = b$ sind daher dann folgende, nämlich

$$\left.\begin{aligned} y - m \cdot x &= a \\ e^{nx} \cdot [mR \cdot p + T \cdot q + m(P - n \cdot R) \cdot z] - m \cdot \int M \cdot e^{nx} \cdot dx &= b \end{aligned}\right\}.$$

Das erste Integral der gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung ist daher

$$(\odot) \cdots e^{nx} \cdot [mR \cdot p + T \cdot q + m(P - nR) \cdot z] - m \cdot \int M \cdot e^{nx} \cdot dx = \varphi_{y - m \cdot x};$$

wenn nur in dem angezeigten Integrale $\int M \cdot e^{nx} \cdot dx$ vor der Integration $m \cdot x + a$ statt y, nach der Integration aber wieder $y - m \cdot x$ statt a gesetzt wird. Und diese Gleichung enthält zwei erste Integrale, weil m selbst zwei Werthe, $m'$ und $m''$, hat, wodurch auch n und M zwei Werthe, $n'$, $n''$ und $M'$, $M''$, annehmen, während man bei dem zweiten Werth von m eine andere willkührliche Funktion $\psi$ statt $\varphi$ setzt. *)

---

*) Soll nun von diesem ersten Integrale $(\odot)$ wiederum das Integral gefunden werden, so denke man daran, daß, weil $m'$ und $m''$ die beiden Werthe von m aus der Gleichung

$$R \cdot m^2 - S \cdot m + T = 0$$

sind, nothwendig $m' \cdot m'' = \frac{T}{R}$ seyn müsse, und nehme dasjenige der ersten Integrale $(\odot)$, in welchem $m'$ statt m steht, so daß solches die Form annehmen kann

$$\partial z_x + m'' \cdot \partial z_y + \frac{P - n' \cdot R}{R} \cdot z - \frac{e^{-n' \cdot x}}{R} \cdot \int M' \cdot e^{n' \cdot x} \cdot dx = e^{-n' \cdot x} \cdot \varphi_{y - m' \cdot x}.$$

Da diese Gleichung zu den lineären Parzialgleichungen der ersten Ordnung gehört, so hängt ihre Integration von der der Gleichungen

$$\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{m''} = \frac{R \cdot \partial z}{R \cdot e^{-n' \cdot x} \cdot \varphi_{y - m' \cdot x} - (P - n' \cdot R) \cdot z + e^{-n' \cdot x} \cdot \int M' \cdot e^{n' \cdot x} \cdot dx}$$

ab. Die erstere dieser Gleichungen giebt

$$y = m'' \cdot x + a';$$

und dadurch wird die zweite Gleichung eine lineäre (totale) Differenzialgleichung vom ersten Grade, deren Integral ohne neue Schwierigkeiten gefunden werden kann, so daß dann das Ur-Integral bekannt ist.

Findet sich aber die Bedingungsgleichung $(\sigma)$ von den gegebenen Koeffizienten der zu integrirenden Parzial-Differenzialgleichung der 2ten

Beispiel 2. Nimmt man die Gleichung

$$(x+y)\cdot(\partial^2 z_x - \partial^2 z_y) + 4\cdot\partial z_x = 0,$$

so hat man $R = -T = x+y$; $S = 0$; $P = 4$; $Q = 0$; $N = 0$; $M = 0$; also $m = \pm 1$. — Die Gleichung

$$\partial y - m\cdot\partial x = 0$$

giebt für $m = 1$, $y-x = a$; daraus folgt $R = a+2x$; $T = -(a+2x)$; $\mu =$ Constante $= 1$; $\mu' = 2$; $\alpha = 2x+a$; $\beta = -(2x+a)$; $\gamma = 2$; $\delta = 0$; und die Gleichungen (§. 459. N. N. 17. und 18.) widersprechen sich nicht; die Bedingungsgleichung der Existenz eines ersten Integrals ist also dasmal erfüllt. — Das erste Integral selbst ist zu gleicher Zeit

$$(x+y)\cdot(\partial z_x - \partial z_y) + 2z - \varphi_{y-x} = 0. \text{ *)}$$

Für den andern Werth $-1$ von m hätten sich die beiden Gleichungen (§. 459. N. N. 17. u. 18.) widersprochen; die Bedingungsgleichung der Existenz des jetzt gesuchten ersten Integrals ist daher nicht erfüllt; dieses nun gesuchte erste Integral existirt also nicht.

---

Ordnung nicht erfüllt, so findet kein erstes Integral statt; und dieser Weg kann dann auch das Ur-Integral nicht geben.

*) Soll dieses Integral auf's neue integrirt werden, so hängt alles von der Integration der totalen Gleichungen

$$\frac{\partial x}{x+y} = -\frac{\partial y}{x+y} = \frac{\partial z}{\varphi_{y-x} - 2z}$$

ab. Die erstere davon, integrirt, giebt

$$x+y = a'.$$

Die andere wird dann

$$\partial z + \frac{2z}{a'}\cdot\partial x - \frac{\partial x}{a'}\cdot\varphi_{a'-2x} = 0;$$

ist nun eine (totale) lineare Gleichung der ersten Ordnung, und giebt, nach (§. §. 362. 363. d. VI. Th. d. S.) integrirt, sogleich

$$z = e^{-\frac{2x}{a'}}\cdot\left[\int \frac{1}{a'}\cdot e^{\frac{2x}{a'}}\cdot\varphi_{a'-2x}\cdot dx + b'\right],$$

Setzt man hier $\psi_{a'}$ statt $b'$, und setzt man zuletzt, nach der Ausführung der angezeigten Integration durchaus $x+y$ statt $a'$, so hat man das Ur-Integral der gegebenen Gleichung der 2ten Ordnung mit den beiden willkührlichen Funktionen $\varphi$ und $\psi$.

## §. 460.

Die Parzial-Differenzialgleichungen der dritten Ordnung, wenn sie nur wiederum die Form

1) $$A\cdot\partial^3 z_x + B\cdot\partial^{2,1} z_{x,y} + C\cdot\partial^{1,2} z_{x,y} + D\cdot\partial^3 z_y = V$$

haben, wo A, B, C, D und V Funktionen von x, y und z und den niedrigern Ableitungen von z sind; können durch ein, dem im (§. 458.) beschriebenen, analoges Verfahren behandelt werden.

Führt man nämlich wiederum neue Veränderliche ein p, q, r, s, t, gegeben durch die Gleichungen

2) $$\partial z_x = p;\quad \partial z_y = q;\quad \partial^2 z_x = r;\quad \partial^{1,1} z_{x,y} = s;\quad \partial^2 z_y = t;$$

so hat man, wenn man sich x und y selber wieder als Funktionen eines neuen Veränderlichen $\nu$ denkt, und die Gleichungen (2.) nach allem $\nu$ differenziirt, unter andern auch die Gleichungen

3) $$\partial^3 z_x\cdot\partial x + \partial^{2,1} z_{x,y}\cdot\partial y = \partial r,$$

4) $$\partial^{2,1} z_{x,y}\cdot\partial x + \partial^{1,2} z_{x,y}\cdot\partial y = \partial s,$$

und

5) $$\partial^{1,2} z_{x,y}\cdot\partial x + \partial^3 z_y\cdot\partial y = \partial t.$$

Findet man aus diesen letzteren 3 Gleichungen die Ableitungen $\partial^3 z_x$, $\partial^{2,1} z_{x,y}$, $\partial^{1,2} z_{x,y}$ in die 4te $\partial^3 z_y$ ausgedrückt, und werden diese Werthe in die gegebene Parzialgleichung (1.) substituirt, so erhält man

6) $$A\cdot\partial r\cdot\partial x^2 + (B\cdot\partial x^2 - A\cdot\partial x\cdot\partial y)\cdot\partial s + (C\cdot\partial x^2 - B\cdot\partial x\cdot\partial y + A\cdot\partial y^2)\cdot\partial t - V\cdot\partial x^3 = -\partial^3 z_y\cdot(D\cdot\partial x^3 - C\cdot\partial x^2\cdot\partial y + B\cdot\partial x\cdot\partial y^2 - A\cdot\partial y^3).$$

Da nun diese Gleichung identisch werden soll, so kann man wieder jede Seite derselben für sich der Null gleich setzen, so daß man erhält

7) $$A\cdot\partial r\cdot\partial x^2 + (B\cdot\partial x^2 - A\cdot\partial x\cdot\partial y)\cdot\partial s + (C\cdot\partial x^2 - B\cdot\partial x\cdot\partial y + A\cdot\partial y^2)\cdot\partial t - V\cdot\partial x^3 = 0.$$

8) $$D\cdot\partial x^3 - C\cdot\partial x^2\cdot\partial y + B\cdot\partial x\cdot\partial y^2 - A\cdot\partial y^3 = 0;$$

und nun diese Gleichungen (7. und 8.) als totale Differenzialglei-

chungen zwischen den 8 Veränderlichen x, y, z, p, q, r, s, t zu integriren suchen, so daß man wo möglich wieder zwei Integrale

$$M = a \quad \text{und} \quad N = b$$

erhält; wo dann

$$N = \varphi_M$$

wiederum ein erstes Integral der gegebenen Parzialgleichung der 3ten Ordnung ist, während solches Integral selber wieder im allgemeinen eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung seyn wird, obgleich in besondern Fällen die Ableitungen der 2ten Ordnung, ja sogar die der ersten Ordnung von selbst herausfallen können, so daß das Integral eine Parzialgleichung der ersten Ordnung, ja selbst eine Urgleichung werden kann. *)

Anmerkg. Es ist leicht einzusehen, wie man Aehnliches für die lineären Parzialgleichungen der nten Ordnung geltend machen kann. — Man sieht aber auch zu gleicher Zeit, daß diese Methode wiederum nur gelingen kann, wenn ein erstes Integral der gegebenen Parzialgleichung existirt, während in demselben Falle die Methode des (§. 322. d. V. Th. d. S.) direkter ist, in so ferne sie sich der Bedingungsgleichungen der Existenz eines solchen ersten Integrals selbst zu dessen Bestimmung bedient.

Beispiel. Wenden wir übrigens diese Methode an auf den Fall, wo in der gegebenen Parzialgleichung

$$A \cdot \partial^3 z_x + B \cdot \partial^{2,1} z_{x,y} + C \cdot \partial^{1,2} z_{x,y} + D \cdot \partial^3 z_y = V$$

die Koeffizienten A, B, C, D konstant sind, während V bloß x und y enthalten soll.

Die beiden Gleichungen (7. und 8. des §. 460.) geben nun die Integrale

---

*) Man kann, um zu diesem Resultate zu gelangen, genau nach (§. 458.) verfahren, d. h. die neuen Veränderlichen a und b einführen, und dann nachweisen, daß dadurch die Gleichung (6.) nothwendig die Form $\partial b = \omega \cdot \partial a = \varphi_a \cdot \partial a$ annimmt. Man kann aber auch à posteriori nachweisen, daß $N = \varphi_M$ der gegebenen Parzialgleichung der 3ten Ordnung wirklich genügt.

$$y - m' \cdot x = a;$$

$$A \cdot r + (B - A \cdot m') \cdot s + (C - B \cdot m' + A \cdot m'^2) \cdot t - \int V \cdot dx = b;$$

wenn man nur in $\int V \cdot dx$ vor der Integration statt y seinen Werth schreibt, und wenn $m'$ einer der Werthe von m aus der Gleichung

$$A \cdot m^3 - B \cdot m^2 + C \cdot m - D = 0$$

ist. Bezeichnet man dann das, was $\int V \cdot dx$ wird, wenn man zuletzt wieder $y - m' \cdot x$ statt a setzt, durch $U'$, so ist das erste Integral der gegebenen Parzialgleichung der 3ten Ordnung folgendes, nämlich:

$$(\odot) \cdots \quad A \cdot r + (B - A \cdot m') \cdot s + (C - B \cdot m' + A \cdot m'^2) \cdot t - U' = \varphi_{y - m' \cdot x}.$$

Sind die 3 Werthe von m einander ungleich, und die beiden andern durch $m''$, $m'''$ bezeichnet, so erhält man noch zwei neue erste Integrale derselben Parzialgleichung.

Beispiel 2. Ist zu integriren die Gleichung

1) $(\partial^2 z_y)^3 \cdot \partial^3 z_x + 3 \cdot (\partial^2 z_y)^2 \cdot u \cdot \partial^{2,1} z_{x,y} + 3 \partial^2 z_y \cdot u^2 \cdot \partial^{1,2} z_{x,y} + u^3 \cdot \partial^3 z_y = 0,$

wo

2) $$u = -\partial^{1,1} z_{x,y} + \sqrt{(\partial^{1,1} z_{x,y})^2 - \partial^2 z_x \cdot \partial^2 z_y},$$

d. h. wo u gegeben ist durch die Gleichung

3) $$u^2 + 2\partial^{1,1} z_{x,y} \cdot u + \partial^2 z_x \cdot \partial^2 z_y = 0;$$

so wird

4) $$m = \frac{u}{t};$$

und die Gleichungen (§. 460. N. N. 7. u. 8.) werden jetzt

5) $\partial y - \frac{u}{t} \cdot \partial x = 0$ und 6) $t^2 \cdot \partial r + 2tu \cdot \partial s + u^2 \cdot \partial t = 0.$

Führt man nun in (6.) statt des Veränderlichen s den durch die Gleichung (2. oder 3.) d. h. durch die Gleichung

7) $$u^2 + 2s \cdot u + r \cdot t = 0$$

gegebenen neuen Veränderlichen u ein, so daß dann $\partial s$ in $\partial u$ ausgedrückt und in die (6.) substituirt wird, so erhält man statt der (6.) jetzt

8) $$(u \cdot \partial t - t \cdot \partial u) \cdot (u^2 - rt) = 0,$$

also entweder

9) $u \cdot \partial t - t \cdot \partial u = 0$ oder 10) $u^2 - rt = 0.$

Nimmt man die (9.) und integrirt sie, so erhält man

11) $$u = a \cdot t; \qquad \frac{u}{t} = a;$$

und die Gleichung (5.) giebt nun

12) $$y = a \cdot x + b.$$

Folglich ist das erste Integral der gegebenen Parzialgleichung der dritten Ordnung jetzt

(⊙)··· $$y = \frac{u}{t} \cdot x + \varphi\left(\frac{u}{t}\right);$$

wo man statt u nur noch seinen Werth aus der Gleichung (2.) setzen darf, um die Parzialgleichung der 2ten Ordnung zu haben, welche nun auf's neue integrirt werden soll.

Da, wenn man für u seinen Werth setzt, die entstehende Gleichung der 2ten Ordnung nicht mehr lineär seyn, die Methode des (§. 458.) also, im Falle diese Gleichung wiederum integrirt werden sollte, gar nicht mehr bei ihr versucht werden könnte; so wird man hier lieber einen neuen Veränderlichen a einführen, gegeben durch die Gleichung

13) $$\frac{u}{t} = a \quad \text{oder} \quad u = at$$

oder

14) $$r + 2a \cdot s + a^2 \cdot t = 0,$$

so daß nun das Integral (⊙) die Form annimmt

15) $$y = a \cdot x + \varphi_a;$$

d. h. das Integral (⊙) erhält man, wenn man aus den Gleichungen (14. u. 15.) den Buchstaben a eliminirt; oder die Gleichung (14.) selbst ist das Integral (⊙), wenn man daselbst statt a den aus der Gleichung (15.) zu ziehenden Werth setzt. Diese Gleichung (14.) ist aber nun nach den höchsten Ableitungen r, s und t lineär, und kann daher nach (§. 458.) weiter behandelt werden. Die Gleichungen (§. 458. N. N. 9—11.) werden aber, weil hier $R = 1$, $S = 2a$ und $T = a^2$ ist, weil also hier $m = m' = m'' = a$ wird, jetzt folgende, nämlich

$$\partial y - a \cdot \partial x = 0 \quad \text{und} \quad \partial p + a \cdot \partial q = 0,$$

welche nun integrirt werden müßten, um ein erstes Integral dieser Gleichung der 2ten Ordnung zu erhalten. Weil aber a die durch die Gleichung (15.) gegebene Funktion von x und y ist, und nicht eher hergestellt werden kann, als bis man die Funktion φ partikularisirt hat, so wird man auch auf diesem Wege nicht zum Integral der Parzialgleichung (⊙) d. h. der Parzialgleichung (14) gelangen können.

Was man aber auf dem systematischen Wege nicht erhalten kann, kann doch zuweilen durch kühne Versuche gefunden werden. So weiß man z. B. aus dem (§. 457.), daß, wenn in der Gleichung (14.), welche an die Stelle der Gleichung (⊙) getreten ist, a konstant wäre; dann das allgemeine Ur-Integral derselben dieses

16) $$z = \chi_{y-a\cdot x} + x\cdot\psi_{y-a\cdot x}$$

seyn würde. Setzt man nun diesen Werth von z, indem man a als Funktion von x und y ansieht, in dieselbe Gleichung (14.), so erhält man eine neue Gleichung, welche in der That identisch wird, wenn man statt der in ihr vorkommenden Ableitungen

$$\partial a_x,\ \partial a_y,\ \partial^2 a_x,\ \partial^{1,1} a_{x,y},\ \partial^2 a_y$$

die Werthe setzt, welche für sie aus dem durch die Gleichung (15.) gegebenen a hervorgehen, und welche man leicht erhält, wenn man diese (15.) abwechselnd nach allem x, und wiederum nach allem y differenziirt.

Also ist die Gleichung (16.), sobald man in ihr unter a die, durch die Gleichung (15.) gegebene, Funktion von x und y versteht, das Ur-Integral der gegebenen Parzialgleichung der dritten Ordnung. — Dasselbe kann man noch umformen, indem nach derselben Gleichung (15.) $\varphi_a$ statt $y-a\cdot x$ geschrieben werden kann, während willkührliche Funktionen von $\varphi_a$ nichts weiter als willkührliche Funktionen von a sind. Also kann man die Gleichung

(♂)··· $$z = \chi_a + x\cdot\psi_a$$

als das Ur-Integral der Parzialgleichung (1.) ansehen, wenn nur unter a die aus der Gleichung (15.) zu findende Funktion von x und y verstanden wird. *)

---

*) Man konnte dieses Integral (♂) sogleich an der Stelle des Integrals (⊙) erhalten. Da nämlich alles darauf ankommt, für die Gleichungen (5. u. 6.) zwei genügende Integrale zu finden, mit zwei willkührlichen Konstanten, so konnte man statt der beiden Integrale (11. u. 12.), nämlich statt

11) $$u = a\cdot t \quad \text{oder} \quad r + 2a\cdot s + a^2\cdot t = 0$$

mit der Konstante a, und

12) $$y = a\cdot x + b$$

mit der 2ten Konstante b, irgend andere setzen, namentlich statt der Gleichung (11.) irgend eine andere, welche ihr (der 11.) genügt, und

## §. 461.

Um nun zu zeigen, wie die Methode des (§. 458.) auch auf lineäre Parzialgleichungen der 2ten und höhern Ordnung zwischen mehr als 3 Veränderlichen ausgedehnt werden kann, betrachten wir die Gleichung der 2ten Ordnung zwischen den 4 Veränderlichen u, x, y, z, nämlich die Gleichung

1) $A \cdot \partial^2 z_u + B \cdot \partial^2 z_x + C \cdot \partial^2 z_y + D \cdot \partial^{1,1} z_{u,x} + E \cdot \partial^{1,1} z_{u,y} + F \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} = V,$

wo A, B, C, D, E, F und V Funktionen der 4 Veränderlichen u, x, y, z und der Ableitungen $\partial z_u$, $\partial z_x$, $\partial z_y$ vorstellen mögen.

Führt man wieder drei neue Veränderliche n, p, q mittelst der Gleichungen

2) $\partial z_u = n$, 3) $\partial z_x = p$ und 4) $\partial z_y = q$

ein, und differenziirt man diese Gleichungen, indem man sich unter u, x und y selber wieder Funktionen eines neuen Veränderlichen t denkt, nach allem t, so erhält man

5) $\partial^2 z_u \cdot \partial u + \partial^{1,1} z_{u,x} \cdot \partial x + \partial^{1,1} z_{u,y} \cdot \partial y = \partial n,$

6) $\partial^{1,1} z_{u,x} \cdot \partial u + \partial^2 z_x \cdot \partial x + \partial^{1,1} z_{x,y} \cdot \partial y = \partial p,$

7) $\partial^{1,1} z_{u,y} \cdot \partial u + \partial^{1,1} z_{x,y} \cdot \partial x + \partial^2 z_y \cdot \partial y = \partial q.$

Eliminirt man nun aus den 4 Gleichungen (1. 5. 6. u. 7.) die 3 Ableitungen $\partial^2 z_u$, $\partial^2 z_x$ und $\partial^2 z_y$, so erhält man statt der gegebenen Parzialgleichung (1.) jetzt diese andere Gleichung:

---

welche daher in Verbindung mit der (12.) auch den Gleichungen (5. u. 6.) genügen muß. Nun genügt aber der Gleichung (11.), in welcher a konstant ist, nach (§. 457.) die Gleichung

(♃)… $$z = \chi_{y-a \cdot x} + x \cdot \psi_{y-a \cdot x},$$

Nimmt man also diese statt der (11.), die (12.) dazu, setzt $b = \varphi_a$, so daß die (12.) die Form

(♀)… $$y = a \cdot x + \varphi_a$$

annimmt, so ist die (♀) das Integral, wenn aus (♃) der Werth von a substituirt wird, oder die (♃) ist das Integral, wenn aus (♀) der Werth von a gesetzt gedacht wird.

$$8)\quad \left\{\begin{array}{l} \partial^{1,1}z_{u,x}\cdot(A\cdot\partial x^2\cdot\partial y + B\cdot\partial u^2\cdot\partial y - D\cdot\partial u\cdot\partial x\cdot\partial y) \\ +\partial^{1,1}z_{u,y}\cdot(A\cdot\partial x\cdot\partial y^2 + C\cdot\partial u^2\cdot\partial x - E\cdot\partial u\cdot\partial x\cdot\partial y \\ +\partial^{1,1}z_{x,y}\cdot(B\cdot\partial u\cdot\partial y^2 + C\cdot\partial u\cdot\partial x^2 - F\cdot\partial u\cdot\partial x\cdot\partial y \end{array}\right\}$$

$$= A\cdot\partial n\cdot\partial x\cdot\partial y + B\cdot\partial p\cdot\partial u\cdot\partial y + C\cdot\partial q\cdot\partial u\cdot\partial x - V\cdot\partial u\cdot\partial x\cdot\partial y.$$

Man setzt nun wieder jede dieser 4 Zeilen der Null gleich. Die 3 ersteren dieser 4 Gleichungen, wenn man in ihnen

$$9)\quad \partial x = h\cdot\partial u \qquad \text{und} \qquad 10)\quad \partial y = k\cdot\partial u$$

setzt, sind Gleichungen zwischen h und k, und geben, wenn man aus ihnen h und k eliminirt, die Gleichung

$$(\odot)\ldots\quad A\cdot F^2 + B\cdot E^2 + C\cdot D^2 = 4ABC + DEF, \text{ *)}$$

welche von den gegebenen Koeffizienten als Bedingungsgleichung erfüllt seyn muß, wenn jede der 4 Zeilen in der Gleichung (8.) für sich der Null soll gleich gesetzt werden können. Ist aber die Gleichung (⊙) erfüllt, so hat man außer den Gleichungen (9. und 10.) noch die Gleichung

$$11)\quad Ahk\cdot\partial n + Bk\cdot\partial p + Ch\cdot\partial q - Vhk\cdot\partial u = 0,$$

während h und k selbst durch zwei von den 3 Gleichungen

$$12)\quad \left\{\begin{array}{ll} A\cdot h^2 - D\cdot h + B & = 0 \\ A\cdot k^2 - E\cdot k + C & = 0 \\ B\cdot k^2 - F\cdot hk + C\cdot h^2 & = 0 \end{array}\right\}$$

gegeben sind.

Kann man nun Integrale finden für die 3 Gleichungen (9. 10. und 11.) von der Form

$$L = a; \qquad M = b \qquad \text{und} \qquad N = c,$$

so ist

$$N = \varphi_{L,M}$$

---

*) Diese von Euler gefundene Bedingungsgleichung ist dieselbe, welche erfüllt seyn muß, wenn das Polynomium

$$A\cdot u^2 + B\cdot x^2 + C\cdot y^2 + D\cdot ux + E\cdot uy + F\cdot xy$$

sich in zwei einfache Faktoren von der Form

$$\alpha\cdot u + \beta\cdot x + \gamma\cdot y$$

soll zerlegen lassen.

ein Integral der gegebenen Parzialgleichung (1.), welches im Allgemeinen eine Parzialgleichung der ersten Ordnung, in besonderen Fällen aber auch eine Urgleichung seyn wird.

Der Grund davon ist derselbe, wie solcher im (§. 458.) entwickelt steht. *)

Beispiel. Sind A, B, C, D, E, F konstant, und ist V eine bloße Funktion von u, x und y (ohne z und ohne Ableitungen von z zu enthalten); ist dabei der Bedingungsgleichung (⊙) genügt, so haben die 3 Gleichungen (9. 10. u. 11.) jetzt zu Integralen

$$x - h \cdot u = a;$$
$$y - k \cdot u = b;$$
$$Ahk \cdot n + Bk \cdot p + Ch \cdot q - \int Vhk \cdot du = C;$$

wenn nur in $\int V \cdot hk \cdot du$ vor der Integration statt x und statt y die Werthe derselben aus den beiden ersteren Gleichungen, nämlich beziehlich $a + h \cdot u$ und $b + k \cdot u$ gesetzt werden, nach der Integration aber wieder statt a und b die Werthe $x - h \cdot u$ und $y - k \cdot u$. Dabei kann man, weil jetzt h und k konstant sind, auch noch $hk \cdot \int V \cdot du$ oder $hk \cdot U$ statt $\int Vhk \cdot du$ schreiben, wenn unter U das verstanden wird, was $\int V \cdot du$ liefert, wenn man vor der Integration $a + h \cdot u$, $b + k \cdot u$ beziehlich statt x und y setzt, nach der Integration aber wiederum $x - h \cdot u$ statt a, und $y - k \cdot u$ statt b. Man hat dann unter dieser Voraussetzung

$$(\mathbb{C})\ldots \quad Ahk \cdot \partial z_u + Bk \cdot \partial z_x + Ch \cdot \partial z_y = \varphi_{x-h\cdot u,\ y-k\cdot u} + h \cdot k \cdot U$$

als erstes Integral der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung.

Will man diese Gleichung (ℂ) auf's neue, als eine lineäre Parzialgleichung der ersten Ordnung, integriren, so hängt solches nach (§. 430.) von der Integration der totalen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{Ahk} = \frac{\partial x}{Bk} = \frac{\partial y}{Ch} = \frac{\partial z}{\varphi_{x-h\cdot u,\ y-k\cdot u} + hk \cdot U}$$

ab, d. h. von den Gleichungen

$$\partial x - h' \cdot \partial u = 0; \qquad \partial y - k' \cdot \partial u = 0$$

---

*) Weil dieses Verfahren wieder die Existenz eines ersten Integrals voraus setzt, so ist es abermals direkter, wenn man auch hier das Verfahren des (§. 322. d. V. Th. d. S.) anwendet, und die Bedingungsgleichungen der Existenz eines solchen ersten Integrals selbst zu dessen Bestimmung mit zu Hülfe nimmt.

und $A \cdot \partial z - (\varphi_{x-h\cdot u,\ y-k\cdot u} + U) \cdot \partial u = 0,$

wenn h und h′ die beiden Werthe von h vorstellen, eben so k und k′ die beiden Werthe von k, so daß man nach den Gleichungen (12.)

$$h \cdot h' = \frac{B}{A} \quad \text{und} \quad k \cdot k' = \frac{C}{A}$$

hat, und wenn man, was hier erlaubt ist, $hk \cdot \varphi$ statt $\varphi$ schreibt. — Die Integrale dieser 3 Gleichungen werden

$$x - h' \cdot u = a'; \qquad y - k' \cdot u = b';$$

und $$Az - \int U \cdot du - \int \varphi_{a'+(h'-h)\cdot u,\ b'+(k'-k)\cdot u} \cdot du = c',$$

wenn man nur im $\int U \cdot du$ vor der Integration $a' + h' \cdot u$ und $b' + k' \cdot u$ beziehlich statt x und y setzt, nach der Integration aber sogleich wieder $x - h' \cdot u$ und $y - k' \cdot u$ statt a′ und b′. Dabei kann man auch noch

$$\psi_{a'+(h'-h)\cdot u,\ b'+(k'-k)\cdot u} \text{ statt } \int \varphi_{a'+(h'-h)\cdot u,\ b'+(k'-k)\cdot u} \cdot du$$

setzen. Denn es wird sogleich, wenn $a' + (h' - h) \cdot u$ und $b' + (k' - k) \cdot u$ beziehlich durch $\omega$ und $\omega'$ vorgestellt werden,

$$\partial \psi_{(u)} = \partial \psi_{\omega} \cdot (h' - h) + \partial \psi_{\omega'} \cdot (k' - k).$$

Zerlegt man also die obige Funktion $\varphi_{\omega,\omega'}$ in zwei Theile, nämlich in

$$(h' - h) \cdot \varphi'_{\omega,\omega'} + (k' - k) \cdot \varphi''_{\omega,\omega'},$$

was immer noch eine willkührliche Funktion von $\omega$ und $\omega'$ ist, so lange $\varphi'$ und $\varphi''$ ganz willkührliche Funktionen von $\omega$ und $\omega'$ vorstellen, so darf man nur $\psi_{\omega,\omega'}$ so nehmen, daß

$$\partial \psi_{\omega} = \varphi'_{\omega,\omega'} \quad \text{und} \quad \partial \psi_{\omega'} = \varphi''_{\omega,\omega'},$$

d. h. daß $\partial \psi_{\omega}$ und $\partial \psi_{\omega'}$ ganz willkührliche Funktionen von $\omega$, $\omega'$ werden; d. h. man darf nur $\psi_{\omega,\omega'}$ ganz willkührlich nehmen, um $\int \varphi_{\omega,\omega'} \cdot du$ ausgedrückt zu haben. Und weil zuletzt auch in diesem Integrale $\psi_{\omega,\omega'}$ wiederum $x - h' \cdot u$ statt a′, und $y - k' \cdot u$ statt b′ gesetzt werden muß, wodurch sich $\omega$, $\omega'$ beziehlich in $x - h \cdot u$, $y - k \cdot u$ umwandeln, so ist das Integral der Gleichung (C), d. h. das zweite Integral der gegebenen Parzialgleichung so gefunden, nämlich:

$$A \cdot z - \int U \cdot du = \psi_{x-h\cdot u,\ y-k\cdot u} + \psi'_{x-h'\cdot u,\ y-k'\cdot u};$$

wo $\psi$ und $\psi'$ ganz willkührliche Funktionen vorstellen. *)

*) Wir haben im (§. 314. d. V. Th. d. S.) die allgemeine alge-

## C. Integration einiger nicht lineären Parzial-Gleichungen.

### §. 462.

Legendre behandelt eine beliebige Parzialgleichung der 2ten Ordnung, welche keine Ableitungen der ersten Ordnuug enthält,

---

braische Form der Ur-Integrale der Differenzialgleichungen der 2ten Ordnung zwischen den 4 Veränderlichen u, x, y, z so festgestellt, nämlich:

$$f_{u,x,y,z} = \psi_{\omega,\omega'} + \psi_{\alpha,\omega''}$$

unter der Voraussetzung, daß $\omega = \alpha$ ist, und daß übrigens $\omega$, $\omega'$ und $\omega''$ bestimmte Funktionen von u, x, y und z sind. — In dem hier gefundenen Integrale ist

$$\omega = x - h \cdot u, \qquad \omega' = y - k \cdot u,$$
$$\alpha = x - h' \cdot u, \qquad \omega'' = y - k' \cdot u,$$

also nicht $\omega = \alpha$. — Es wäre aber sehr unrichtig, wenn man von dieser und von ähnlichen Ausnahmen auf die Ungültigkeit der (im V. Th. d. S.) von uns zuerst gegebenen allgemeinen Form dieser Integrale schließen wollte. Im Gegentheil besteht ein sehr wesentlicher Theil des Nutzens, welchen man aus der Kenntniß irgend einer allgemeinen analytischen Form zieht, gerade darin, daß man aus ihr selbst alle Ausnahmen, welche sie in besonderen Fällen erleiden kann, direkt zu finden im Stande ist.

So wie nämlich z. B. der Taylor'sche Lehrsatz allgemein für jede Funktion von x wahr ist, und für besondere Werthe von x aufhören kann, wahr zu seyn; und so wie man gerade aus seiner allgemeinen Form (dadurch, daß man die Nenner der einzelnen Koeffizienten gleich Null setzt) diese Ausnahmswerthe von x findet (für jede gegebene Funktion $f_x$), für welche er nicht mehr statt findet, so findet man auch hier mittelst des Beweises (§. 320. d. V. Th. d. S.) aus der allgemeinen Form des allgemeinen Integrals, leicht diejenigen speziellen Werthe von $\omega$, $\omega'$, ꝛc. ꝛc., für welche diese allgemeine Form aufhört wahr zu seyn, und in eine Ausnahmsform übergeht.

Wenn daher weder im (V. Th. d. S.) diese Ausnahmswerthe berücksichtigt worden sind, noch hier weiter berücksichtigt werden, so geschah und geschieht dies aus keinem anderen Grunde, als weil es dem Zwecke dieses Lehrbuches entgegen wäre, wenn einzelne Gegenstände, welche

und welcher man die Form geben kann

1) $$r = f_{s,t},$$

wenn der Kürze wegen

2) $$\partial^2 z_x = r, \quad \partial^{1,1} z_{x,y} = s \quad \text{und} \quad \partial^2 z_y = t$$

gesetzt wird, — indem er sie wiederum auf eine lineäre Gleichung zurückführt.

Er führt zu dem Ende abermals zwei neue Veränderliche p und q ein, mittelst der Gleichungen

3) $$\partial z_x = p \quad \text{und} \quad \partial z_y = q,$$

und findet, wenn man x und y selber wieder als Funktionen eines neuen Veränderlichen w ansieht, und die letzteren beiden Gleichungen nach letzterem differenziirt,

4) $$\partial p = r \cdot \partial x + s \cdot \partial y; \quad \partial q = s \cdot \partial x + t \cdot \partial y;$$

oder wenn man theilweise integrirt,

5) $$\begin{cases} p = r \cdot x + s \cdot y - \int (x \cdot \partial r + y \cdot \partial s) \cdot dw; \\ q = s \cdot x + t \cdot y - \int (x \cdot \partial s + y \cdot \partial t) \cdot dw. \end{cases}$$

Setzt man nun

6) $$\int (x \cdot \partial s + y \cdot \partial t) \cdot dw = v \quad \text{d. h.} \quad x \cdot \partial s + y \cdot \partial t = \partial v,$$

und denkt man sich x und y, also auch $v$ als Funktionen von s und t, so hat man

7) $$\partial v_s = x \quad \text{und} \quad \partial v_t = y.$$

Die gegebene Parzialgleichung

$$r = f_{s,t}$$

giebt aber, wenn man sie nach allem w differenziirt,

8) $$\partial r = \partial f_s \cdot \partial s + \partial f_t \cdot \partial t.$$

Dadurch wird jedoch

9) $$x \cdot \partial r + y \cdot \partial s = (x \cdot \partial f_s + y) \cdot \partial s + x \cdot \partial f_t \cdot \partial t;$$

---

früher bei ähnlichen Gelegenheiten bereits ausführlicher besprochen sind, immer auf's neue weitläufiger besprochen werden sollten. — Ohnedies müssen wir jetzt schon Leser voraussetzen, denen auch bloße Andeutungen genügen.

und weil oben in (5.)

$$\int(x\cdot\partial r+y\cdot\partial s)\cdot dw = r\cdot x+s\cdot y-p$$

gefunden worden ist, und letzterer Ausdruck in einen andern verwandelt gedacht werden kann, welcher bloß r und s, also auch in einen anderen, welcher bloß s und t enthält, so ist der Ausdruck in (9.) zur Rechten, nämlich

$$(x\cdot\partial f_s+y)\cdot\partial s+x\cdot\partial f_t\cdot\partial t,$$

als Funktion bloß von s, t, ∂s und ∂t, nothwendig integrabel; also hat man noch die Bedingungsgleichung der Integrabilität:

$$\partial(x\cdot\partial f_s+y)_{(t)} = \partial(x\cdot\partial f_t)_{(s)}$$

oder

10) $$\partial f_s\cdot\partial x_t+\partial y_t = \partial f_t\cdot\partial x_s.$$

Setzt man aber in diese Gleichung statt $\partial x_t$, $\partial y_t$ und $\partial x_s$ die Werthe, welche sich aus den Gleichungen (7.), nämlich aus

$$\partial v_s = x \quad \text{und} \quad \partial v_t = y$$

für sie ergeben, so erhält man statt der gegebenen Parzialgleichung (1.) jetzt diese, nach den höchsten Ableitungen von $v$ lineäre, Parzialgleichung

11) $$\partial^2 v_s+S\cdot\partial^{1,1}v_{s,t}-T\cdot\partial^2 v_t = 0;$$

wo der Kürze wegen

$$\partial f_s = S \quad \text{und} \quad \partial f_t = T$$

gesetzt worden ist, so daß S und T als bekannte Funktionen von s und t angesehen werden müssen.

Gelingt es, diese Gleichung (11.) zu integriren, also $v$ in s und t auszudrücken, so hat man dann aus (5. und 6.):

$$q = s\cdot x+t\cdot y-v; \quad p = r\cdot x+s\cdot y-\int(x\cdot\partial r+y\cdot\partial s)\cdot dw$$

und $$z = p\cdot x+q\cdot y-\int(x\cdot\partial p+y\cdot\partial q)\cdot dw.$$

## §. 463.

Poisson hat für die Integration der Gleichungen von der Form

1) $$P = (\partial^2 z_x\cdot\partial^2 z_y-\partial^{1,1}z_{x,y}^2)^n\cdot Q,$$

wo P bloß eine Funktion der Ableitungen $\partial z_x$, $\partial z_y$, $\partial^2 z_x$,

$\partial^{1,1}z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$, aber in Bezug auf die 3 letzteren homogen ist, während Q sowohl x, y und z, als auch alle Ableitungen von z enthalten kann, — besondere Integrale aufgesucht, und in der Theorie des Schalles mit Nutzen verwendet.

Um diese besonderen Integrale zu finden, setzt er

$$2) \qquad \partial^2 z_x \cdot \partial^2 z_y - \partial^{1,1} z_{x,y} = 0,$$

integrirt diese Gleichung, und erhält als erstes Integral

$$3) \qquad \partial z_y = \varphi_{\partial z_x}.$$

Hernach bestimmt er $\varphi$ so, daß auch noch

$$4) \qquad P = 0$$

wird, so daß der Gleichung (1.) wieder dadurch genügt ist, daß man jede Seite für sich der Null gleich macht.

Führt man nämlich neue Veränderliche, p und q, so ein, daß

$$\partial z_x = p \qquad \text{und} \qquad \partial z_y = q$$

wird, so daß die Gleichung (3.) die Form

$$5) \qquad q = \varphi_p$$

annimmt; und differenziirt man diese Gleichung nach x und nach y, so erhält man, weil

$$6) \quad \partial q_x = \partial^{1,1} z_{x,y} = \partial p_y; \quad \partial q_y = \partial^2 z_y \text{ und } \partial p_x = \partial^2 z_x \text{ ist,}$$

$$7) \qquad \partial^{1,1} z_{x,y} = \partial\varphi_p \cdot \partial p_x = \partial\varphi_p \cdot \partial^2 z_x,$$

$$8) \qquad \partial^2 z_y = \partial\varphi_p \cdot \partial p_y = \partial\varphi_p \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} = \partial\varphi_p{}^2 \cdot \partial^2 z_x.$$

Setzt man nun diese Werthe statt $\partial^{1,1}z_{x,y}$ und $\partial^2 z_y$ in die Gleichung

$$4) \qquad P = 0,$$

so wird sich solche, da P in Bezug auf $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$ homogen seyn soll, durch $\partial^2 z_x$ wegdividiren lassen, so daß man eine Gleichung bloß zwischen p, $\varphi_p$ und $\partial\varphi_p$ erhalten wird, welche, wenn man sie, wie jede andere totale Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen zwei Veränderlichen integrirt, eine Glei-

chung zwischen p und q liefert, mit einer willkührlichen Konstante, aber ohne willkührliche Funktion.

Integrirt man zuletzt diese Parzialgleichung der ersten Ordnung noch einmal, so erhält man ein Ur-Integral mit einer willkührlichen Funktion (und mit der vorher erwähnten willkührlichen Konstante), welches also nur ein besonderes Integral der gegebenen Parzialgleichung (1.) seyn wird.

Beispiel 1. Hieher gehört die Gleichung

$$\partial^2 z_y + 2\partial z_x \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + (\partial z_x^2 - c^2) \cdot \partial^2 z_x = 0,$$

welche bei den Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles vorkommt. — Vergleicht man diese mit der des Textes, so muß man $Q = 0$ nehmen; während sie selber sogleich die $P = 0$ ist. — Sie wird durch die angezeigten Substitutionen

$$\partial\varphi_p{}^2 + 2p \cdot \partial\varphi_p + p^2 - c^2 = 0.$$

Löst man diese nach $\partial\varphi_p$ auf, so erhält man

$$\partial\varphi_p = -p \pm c;$$

also, wenn man integrirt,

$$\varphi_p = -\tfrac{1}{2}p^2 \pm c \cdot p + a;$$

so daß das erste Integral $q = \varphi_p$ jetzt

$$q = -\tfrac{1}{2}p^2 \pm c \cdot p + a$$

oder

$$\partial z_y + \tfrac{1}{2}\partial z_x{}^2 \mp c \cdot \partial z_x - a = 0$$

wird.

Diese Gleichung der ersten Ordnung giebt aber, wenn sie nach (§. 453.) auf's neue integrirt wird, das System der beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{matrix} z = p \cdot x + (a \pm cp - \tfrac{1}{2}p^2) \cdot y + \psi_p \\ 0 = x \pm cy - p \cdot y + \partial\psi_p \end{matrix}\right\}$$

zum Ur-Integral, aus welchem der Buchstabe p nur noch eliminirt werden darf.

Wegen des doppelten Zeichens (±) hat man aber sogleich zwei Ur-Integrale gefunden, deren jedem man eine andere willkührliche Funktion beilegen kann.

Beispiel 2. Hieher gehört auch die Parzialgleichung

$$(1+\partial z_y^2)\cdot\partial^2 z_x - 2\partial z_x\cdot\partial z_y\cdot\partial^{1,1}z_{x,y} + (1+\partial z_x^2)\cdot\partial^2 z_y = 0 \quad *)$$

Das Integral $q = \varphi_p$

liefert die Gleichung

$$q = \varphi_p = a\cdot p + \sqrt{-1-a^2}$$

d. h. $$\partial z_y - a\cdot\partial z_x = \sqrt{-1-a^2};$$

und diese lineare Parzialgleichung der ersten Ordnung, auf's neue integrirt, giebt wieder

$$z = \varphi_{x+ay} + y\cdot\sqrt{-1-a^2};$$

welche Urgleichung jedoch wiederum nur eine willkührliche Funktion in sich aufgenommen hat, also nur ein besonderes Integral der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung ist.

## D. Versuche, die Parzial-Differenzialgleichungen der zweiten oder höhern Ordnungen durch Umformung zu integriren.

### §. 464.

Soll wiederum die Gleichung der 2ten Ordnung

1) $R\cdot\partial^2 z_x + S\cdot\partial^{1,1}z_{x,y} + T\cdot\partial^2 z_y + P\cdot\partial z_x + Q\cdot\partial z_y + N\cdot z = M$

integrirt werden, welche wir bereits (§. 459.) behandelt haben, so denke man sich statt der Veränderlichen x und y zwei neue Veränderliche u und v durch 2 noch unbekannte Gleichungen eingeführt, und nach (dem Kap. III. d. III. Th. d. S.) die Ableitungen von z nach x und y, in Ableitungen von z nach u und v ausgedrückt, und diese Ausdrücke statt der ersteren in die Gleichung (1.) substituirt. Dadurch wird sie sich in diese folgende umwandeln:

---

*) Dies ist die allgemeine Gleichung für die kleinste Fläche zwischen gegebenen Grenzen.

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} &[R\cdot\partial u_x^2+S\cdot du_x\cdot\partial u_y+T\cdot\partial u_y^2]\cdot\partial^2 z_u\\ +&[2R\cdot\partial u_x\cdot\partial v_x+S\cdot(\partial u_x\cdot\partial v_y+\partial u_y\cdot\partial v_x)+2T\cdot\partial u_y\cdot\partial v_y]\cdot\partial^{1,1}z_{u,v}\\ &+[R\cdot\partial v_x^2+S\cdot\partial v_x\cdot\partial v_y+T\cdot\partial v_y^2]\cdot\partial^2 z_v\\ +&[R\cdot\partial^2 u_x+S\cdot\partial^{1,1}u_{x,y}+T\cdot\partial^2 u_y+P\cdot\partial u_x+Q\cdot\partial u_y]\quad\cdot\partial z_u\\ +&[R\cdot\partial^2 v_x+S\cdot\partial^{1,1}v_{x,y}+T\cdot\partial^2 v_y+P\cdot\partial v_x+Q\cdot\partial v_y]\quad\cdot\partial z_v\\ &+N\cdot z\end{aligned}\right\}=M.$$

Denkt man sich nun $u=u_{x,y}$ und $v=v_{x,y}$ so genommen, daß in dieser Gleichung die Koeffizienten von $\partial^2 z_u$ und $\partial^2 z_v$ der Null gleich werden, so hat man zur Bestimmung von $u$ und $v$ die beiden Gleichungen

$$3)\quad \left.\begin{aligned} R\cdot\partial u_x^2+S\cdot\partial u_x\cdot\partial u_y+T\cdot\partial u_y^2&=0\\ R\cdot\partial v_x^2+S\cdot\partial v_x\cdot\partial v_y+T\cdot\partial v_y^2&=0\end{aligned}\right\},$$

während die gegebene Differenzialgleichung (1. oder 2.) jetzt die Form

$$4)\quad \partial^{1,1}z_{u,v}+P_1\cdot\partial z_u+Q_1\cdot\partial z_v+N_1\cdot z=M_1$$

annimmt. — Setzt man nun noch

$$5)\ \partial u_x=m\cdot\partial u_y\quad\text{und}\quad 6)\ \partial v_x=n\cdot\partial v_y,$$

so sind vermöge der Gleichungen (3.) m und n die beiden Werthe von $\mu$ in der Gleichung

7) $$R\cdot\mu^2+S\cdot\mu+T=0,$$

also daß man hat

8) $$m+n=-\frac{S}{R} \quad \text{und} \quad 9)\ m\cdot n=\frac{T}{R}.$$

Hat man daher aus (8. u. 9.) m und n gefunden, so sind die Gleichungen (5. u. 6.) die beiden Parzial-Gleichungen, welche statt der (3.) genommen werden können, und welche u und v in x und y liefern, während man nicht allgemeine Integrale, sondern bloß genügende besondere Integrale dieser Gleichungen nöthig hat. Die Integration der Gleichung (5.), da sie in Bezug auf $u=u_{x,y}$ eine lineäre Parzialgleichung der ersten Ordnung ist, hängt nach (§. 429.) von den Gleichungen

$$\frac{\partial x}{1}=-\frac{\partial y}{m}=\frac{\partial U}{0},$$

d. h. von den Gleichungen

$$\partial y+m\cdot\partial x=0 \quad \text{und} \quad \partial U=0$$

ab, welche $U=b$ und $\int\xi\cdot(\partial y+m\cdot\partial x)\cdot dt=U_{x,y}=a$ geben, wenn $\xi$ den integrirenden Faktor vorstellt, und U das Integral. Statt nun aber das allgemeine Integral $b=\varphi_a$ zu nehmen, nimmt man bloß ein besonderes z. B. $b=1\cdot a=a$

d. h. 9) $$u=U_{x,y}.$$ —

Dasselbe gilt von der Gleichung (6.); man kann zu ihrem Integral

10) $$v=V_{x,y}$$

nehmen, wenn $V=\int\xi'\cdot(\partial y+n\cdot\partial x)\cdot dt$ ist.

Hat man nun auf diese Weise $u=U_{x,y}$ und $v=V_{x,y}$ gefunden, zieht man daraus x und y in u und v ausgedrückt, und substituirt diese Werthe statt x und y in die Koefizienten $P_1$, $Q_1$, $N_1$ und $M_1$ der Gleichung (4.); so steht nun die Gleichung (4.) statt der gegebenen Parzialgleichung (1.), ist aber einfacher und eine Gleichung zwischen z, u und v.

Anmerkg. 1. Diese Reduktion der Parzialgleichung (1.) auf die Gleichung (4.) kann nicht durchgeführt werden,

A) wenn die beiden Werthe von $\mu$ aus der Gleichung (7.) einander gleich sind, also wenn $S^2 = 4RT$ ist. In diesem Falle kann man nur einen einzigen neuen Veränderlichen, u etwa, einführen, gegeben durch die erste der Gleichungen (3.), und man muß $v = y$ nehmen. Die gegebene Differenzialgleichung (1.) kann dann auf die Form

$$\partial^2 z_y + Q_1 \cdot \partial z_y + P_1 \cdot \partial z_u + N_1 \cdot z = M_1$$

gebracht werden. — Dieselbe Reduktion kann aber auch nicht durchgeführt werden,

B) wenn $S = T = 0$ ist. — Allein dann hat die Gleichung (1.) selbst schon diese einfachere Form

$$\partial^2 z_x + P \cdot \partial z_x + Q \cdot \partial z_y + N \cdot z = M.$$

Anmerkg. 2. Diese Transformation verwandelt die Gleichung der nten Ordnung

$$V = A \cdot z + B \cdot (x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y)$$
$$+ C \cdot (x^2 \cdot \partial^2 z_x + 2xy \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + y^2 \cdot \partial^2 z_y)$$
$$+ D \cdot (x^3 \cdot \partial^3 z_x + 3x^2 y \cdot \partial^{2,1} z_{x,y} + 3xy^2 \cdot \partial^{1,2} z_{x,y} + y^3 \cdot \partial^3 z_y)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$+ N \cdot (x^n \cdot \partial^n z_x + n \cdot x^{n-1} y \cdot \partial^{n-1,1} z_{x,y} + n_2 \cdot x^{n-2} y \cdot \partial^{n-2,2} z_{x,y} + \cdots + y^n \cdot \partial^n z_y),$$

wenn A, B, C, D, ... N konstant sind, indem man

$$u = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad v = y$$

nimmt, sogleich in diese:

$$V = A \cdot z + B \cdot v \cdot \partial z_v + C \cdot v^2 \cdot \partial^2 z_v + \cdots + N \cdot v^n \cdot \partial^n z_v;$$

welche eine totale Differenzialgleichung der nten Ordnung zwischen 2 Veränderlichen z und v ist, und zwar die Form derjenigen hat, die früher bereits behandelt worden sind, und welche auf lineäre (totale) Differenzialgleichungen zurückgebracht werden können.

## §. 465.

Geben wir uns nun die Gleichung (§. 464. N. 4.), nämlich die Gleichung

1) $$\partial^{1,1}z_{u,v}+P_1\cdot\partial z_u+Q_1\cdot\partial z_v+N_1\cdot z=M_1,$$

in welcher $P_1$, $Q_1$, $N_1$ und $M_1$ bekannte Funktionen von u und v sind (ohne z selbst zu enthalten).

I. Zuerst schreibt man sie so:

2) $$\partial(\partial z_v+P_1\cdot z)_u+Q_1\cdot\left[\partial z_v+\frac{1}{Q_1}\cdot(N_1-\partial(P_1)_u)\cdot z\right]=M_1;$$

und dann ist sie eine totale Gleichung zwischen den 2 Veränderlichen u und $\partial z_v+P_1\cdot z$ (welche Summe durch einen einzigen Buchstaben $z'$ bezeichnet werden kann), so oft die Bedingungsgleichung

$$(\odot)\cdots\ \frac{1}{Q_1}\cdot(N_1-\partial(P_1)_u)=P_1 \text{ oder } N_1-P_1\cdot Q_1-\partial(P_1)_u=0^*)$$

erfüllt ist; und dann giebt sie, wenn man sie als eine lineäre totale Gleichung zwischen $z'$ und u, in welcher v als konstant angesehen werden muß, integrirt,

3) $$z'=\partial z_v+P_1\cdot z=e^{-\int Q_1\cdot du}\cdot\left[\int(e^{\int Q_1\cdot du}\cdot M_1)\cdot du+\psi_v\right],$$

während diese, wenn man sie noch einmal, als eine lineäre totale Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen z und v integrirt, wobei u als konstant angesehen werden muß, wiederum z liefert.

II. Man kann die Gleichung (1.) auch so schreiben:

$$\partial(\partial z_u+Q_1\cdot z)_u+P_1\cdot\left[\partial z_u+\frac{1}{P_1}(N_1-\partial(Q_1)_u)\cdot z\right]=M_1;$$

---

*) Im (§. 459.), wo dieselbe Gleichung behandelt worden (die dortigen R, T sind hier beide $=0$), hat man auch eine Bedingungsgleichung gefunden, welche erfüllt seyn muß, wenn das Verfahren des (§. 458.) soll eintreten können. Diese ist von der hier so eben gefundenen nicht verschieden.

und darf dann in dem Resultate (4.), so wie in (⊙), nur u und x, desgleichen $P_1$ und $Q_1$ mit einander vertauschen, um die Bedingungsgleichung für die jetzt gewünschte Reduktion auf eine totale Differenzialgleichung, und dadurch das Integral selbst zu haben.

Beispiel. Ist gegeben die Gleichung

$$\partial^{1,1}z_{u,v}+a\cdot\partial z_u+b\cdot\partial z_v+c\cdot z=M_1;$$

so wird die Gleichung (⊙) jetzt $c-ab=0$. — Ist sie erfüllt, so ist das Integral der Gleichung

$$\partial^{1,1}z_{u,v}+a\cdot\partial z_u+b\cdot\partial z_v+ab\cdot z=M_1$$

jetzt folgendes:

$$z=e^{-av}\cdot\varphi_u+e^{-bu}\cdot\psi_v+e^{-av-bu}\cdot\int\left(e^{av}\cdot\int(e^{bu}\cdot M_1)\cdot du\right)\cdot dv.$$

III. Ist die Bedingungsgleichung (⊙) nicht erfüllt, so kann man, nach Laplace, doch wiederum

5) $$\partial z_v+P_1\cdot z=z'$$

setzen, und die gegebene Parzialgleichung dadurch, und wenn man der Kürze wegen

6) $$N_1-P_1\cdot Q_1-\partial(P_1)_u=\alpha$$ *)

setzt, in folgende umformen:

7) $$\partial z'_u+Q_1\cdot z'+\alpha\cdot z=M_1.$$

Findet man hieraus z, daraus wieder $\partial z_v$, und setzt man diese Werthe in die Gleichung (5.), so erhält man eine Gleichung von der Form

8) $$\partial^{1,1}z'_{u,v}+P'_1\cdot\partial z'_u+Q'_1\cdot\partial z'_v+N'_1\cdot z'=M'_1,$$

die der Form nach für z' genau dieselbe ist, welche die (1.) für z war.

Ist daher die Bedingungsgleichung

(⊙')... $$N'_1-P'_1\cdot Q'_1-\partial(P'_1)_u=0$$

---

*) Man bemerke wohl, daß $\alpha=0$ gerade die Bedingungsgleichung (⊙) ist.

erfüllt, so läßt sich die (8.) als eine totale Gleichung integriren (nach I.).

Ist aber die Gleichung (⊙′) nicht erfüllt, so kann man wieder

9) $$N'_1 - P'_1 \cdot Q'_1 - \partial(P'_1)_u = \alpha'$$

und 10) $$\partial z'_v + P'_1 \cdot z' = z''$$

setzen.

Die Gleichung (8.) geht dann wieder in eine von der Form

11) $$\partial z''_u + Q'_1 \cdot z'' + \alpha' \cdot z' = M'_1$$

über, so daß man daraus wieder $z'$, und dann noch $\partial z'_v$ finden, diese Werthe in die (10.) substituiren, und diese dadurch in eine Gleichung von der Form

12) $$\partial^{1,1} z''_{u,v} + P''_1 \cdot \partial z''_u + Q''_1 \cdot \partial z''_v + N''_1 \cdot z = M''_1$$

verwandeln kann, welche in Bezug auf $z''$ dieselbe ist, wie die (1.) für $z$.

Man kann so fortfahren, $\alpha''$, $\alpha'''$, ꝛc. ꝛc. einzuführen und $z'''$, $z^{IV}$, ꝛc. ꝛc., und neue Gleichungen für $z'''$, $z^{IV}$, ꝛc. ꝛc. zu bilden, bis endlich vielleicht $\alpha^{(a)} = 0$ wird, also die Gleichung für $z^{(a+1)}$ als eine totale Differenzialgleichung zwischen 2 Veränderlichen $z^{(a+1)}$ und $u$ integrirt werden kann, wo man dann aus diesem $z^{(a+1)}$, rückwärtsgehend,

$$z^{(a)},\ z^{(a-1)},\ \ldots\ z''',\ z'',\ z',$$

und zuletzt auch $z$ bestimmen kann.

Es versteht sich dabei von selbst, daß man in dem ganzen Verfahren, nach (II.), $u$ mit $v$ vertauschen kann.

Ferner mag man noch besonders beachten, daß, wenn $\alpha^{(a)} = 0$ gefunden worden seyn sollte, nicht bloß $z^{(a+1)}$, sondern auch noch $z^{(a)}$ durch Integration einer lineären totalen Differenzialgleichung zwischen 2 Veränderlichen $z^{(a+1)}$ und $u$, und $z^{(a)}$ und $v$, jede aber von der ersten Ordnung, gefunden werden müssen, daß aber dann $z^{(a-1)}$, $z^{(a-2)}$ .... ꝛc. ꝛc. $z''$, $z'$, $z$,

aus $z^{(a+1)}$ und $z^{(a)}$ und aus einander mit Hilfe der Werthe $\alpha^{(a-1)}$, $\alpha^{(a-2)}$, ... $\alpha''$, $\alpha'$, $\alpha$ ohne neue Integration gefunden werden.

## §. 466.

Da die im (§. 464.) gelehrte Reduktion der Gleichung

1) $R\cdot\partial^2 z_x + S\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + T\cdot\partial^2 z_y + P\cdot\partial z_x + Q\cdot\partial z_y + N\cdot z = M$

auf diese andere

2) $\partial^{1,1} z_{u,v} + P_1\cdot\partial z_u + Q_1\cdot\partial z_v + N_1\cdot z = M_1$,

welche in dem letztern (§. 465.) betrachtet worden ist, in der Ausführung Hindernisse der Rechnung finden kann, so hat Legendre eine Umformung, ähnlich der des (§. 465. Nr. III.), sogleich auf die Gleichung von der Form

3) $\partial^2 z_x + S\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + T\cdot\partial^2 z_y + P\cdot\partial z_x + Q\cdot\partial z_y + N\cdot z = 0$,

auf welche sich die (1.) leicht zurückführen läßt, so oft ein besonderes Integral der (1.) bekannt ist, *) anzuwenden versucht. Er hat gefunden, daß wenn m und n die beiden Werthe von $\mu$ aus der Gleichung

4) $\mu^2 - S\cdot\mu + T = 0$

sind, dann die Gleichung (3.) durch die beiden Gleichungen

5) $\left.\begin{aligned} \partial z_x + m\cdot\partial z_y + K\cdot z &= z' \\ \partial z'_x + n\cdot\partial z'_y + L\cdot z' &= \alpha\cdot z \end{aligned}\right\}$

ersetzt werden kann, wo

---

*) Ist 3 dieser besondere Werth von z, welcher der Gleichung (1.) genügt, so hat man

$$R\cdot\partial^2 3_x + S\cdot\partial^{1,1} 3_{x,y} + T\cdot\partial^2 3_y + P\cdot\partial 3_x + Q\cdot\partial 3_y + N\cdot 3 = M.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der (1.), und setzt man $z-3$ einem neuen Veränderlichen gleich, so hat man diese Form (3.), da man durch R wegdividiren und dann S, T, ꝛc. statt $\frac{S}{R}$, $\frac{T}{R}$, ꝛc. ꝛc. schreiben kann.

$$\frac{\partial m_x + (S-m)\cdot\partial m_y + P\cdot m - Q}{2m-S} = K; \qquad P-K = L;$$

und

$$\partial K_x + n\cdot\partial K_y + L\cdot K - N = \alpha$$

gesetzt worden ist. *)

Findet sich nun $\alpha = 0$, so läßt sich die 2te der Gleichungen (4.), als lineäre Parzialgleichung der ersten Ordnung, integriren. Hat man aber auf diese Weise $z'$ gefunden, so liefert die erstere der Gleichungen (4.), wiederum als lineäre Parzialgleichung der ersten Ordnung, sogleich $z$ dazu.

Ist aber nicht $\alpha = 0$, so findet man die Gleichung für $z'$ nur dadurch, daß man aus beiden Gleichungen (4.) jetzt $z$ eliminirt. Diese entstehende Gleichung für $z'$ hat jedoch wieder dieselbe Form, wie sie die Gleichung (3.) für $z$ hat; und sie läßt sich daher wieder ganz auf dieselbe Weise behandeln. So kann man aber fortfahren, $\alpha'$, $\alpha''$, 2c. einzuführen, und $z''$, $z'''$, 2c. 2c., bis endlich einer der Ausdrücke $\alpha'$, $\alpha''$, 2c. 2c. vielleicht Null wird, wo dann die Integration auf diesem Wege als möglich angesehen werden kann.

Wendet man dies Verfahren mit Legendre auf die Gleichung

$$\partial^2 z_x - a^2\cdot y^{2b}\cdot\partial^2 z_y = 0$$

an, so findet man, daß diese Parzialgleichung der 2ten Ordnung auf diesem Wege in allen den Fällen auf eine totale Differenzialgleichung zurückgeführt werden kann, in welchen die Gleichung des Riccati integrirt wird. (Vgl. §. 354. III. d. VI. Th. d. S.).

## §. 467.

Will man diese Methode des (§. 466.) auf lineäre Glei-

---

*) Eliminirt man $z'$ aus den beiden Gleichungen (4.) (d. h. differenziirt man die erstere nach allem x und nach allem y, und setzt man die Werthe für $z'$, $\partial z'_x$, $\partial z'_y$ in die andere), so erhält man wirklich die Parzialgleichung (3.) wieder, vorausgesetzt, daß man statt K, L, $\alpha$ ihre Werthe setzt.

chungen der dritten Ordnung anwenden, welche aber auch in Bezug auf z selbst bloß die lineäre Form haben, nämlich auf die Gleichung

$$1)\quad \left\{\begin{array}{ccc} \partial^3 z_x + A\cdot\partial^{2,1} z_{x,y} + B\cdot\partial^{1,2} z_{x,y} + C\cdot\partial^3 z_y \\ + D\cdot\partial^2 z_x \quad + E\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + F\cdot\partial^2 z_y \\ + G\cdot\partial z_x \quad + H\cdot\partial z_y \quad + K\cdot z \end{array}\right\} = 0,$$

so findet man, daß wenn diese beiden, nämlich

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} \partial z_x + L\cdot\partial z_y + M\cdot z = z' \\ \partial^2 z'_x + S\cdot\partial^{1,1} z'_{x,y} + T\cdot\partial^2 z'_y + P\cdot\partial z'_x + Q\cdot\partial z'_y + N\cdot z' = \alpha\cdot z \end{array}\right\}$$

sie ersetzen sollen, noch Bedingungsgleichungen erfüllt seyn müssen; welche man übrigens erhält, wenn man aus diesen beiden Gleichungen (2.) den Veränderlichen $z'$ eliminirt, und das Resultat mit der (1.) zusammenfallen macht.

Legendre hat einen sehr allgemeinen Fall behandelt, nämlich den Fall, in welchem die Ableitungen nach y bloß einmal genommen sind, d. h. die Gleichung

$$3)\quad \partial^3 z_x + A\cdot\partial^{2,1} z_{x,y} + B\cdot\partial^2 z_x + C\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + D\cdot\partial z_x + E\cdot\partial z_y + F\cdot z = 0.$$

Ersetzt man diese Gleichung durch die beiden

$$4)\quad \left\{\begin{array}{l} \partial z_x + M\cdot z = z' \\ \partial^2 z'_x + S\cdot\partial^{1,1} z'_{x,y} + P\cdot\partial z'_x + Q\cdot\partial z'_y + N\cdot z' = \alpha\cdot z \end{array}\right\}',$$

so erhält man

$$S = A; \qquad P = B - M; \qquad Q = C - A\cdot M;$$

$$N = D - B\cdot M + M^2 - A\cdot\partial M_y - 2\partial M_x; \quad \partial M_x = M^2 + \frac{E - C\cdot M}{A};$$

$$\alpha = \partial^2 M_x + S\cdot\partial^{1,1} M_{x,y} + P\cdot\partial M_x + Q\cdot\partial M_y + N\cdot M - F.$$

Eliminirt man nun aus den beiden Gleichungen (4.) den Veränderlichen z, so erhält man für $z'$ eine Gleichung von derselben Form, welche die (2.) für z hat, nämlich

$$5)\quad \partial^3 z'_x + A'\cdot\partial^{2,1} z'_{x,y} + B'\cdot\partial^2 z'_x + C'\cdot\partial^{1,1} z'_{x,y} + D'\cdot\partial z'_x + E'\cdot\partial z'_y + F' = 0,$$

wo $A' = A$; $B' = P + M - \frac{\partial \alpha_x}{\alpha}$;

$C' = Q + \partial A_x + A \cdot \left(M - \frac{\partial \alpha_x}{\alpha}\right)$; $D' = N + \partial P_x + P \cdot \left(M - \frac{\partial \alpha_x}{\alpha}\right)$;

$E' = \partial Q_x + Q \cdot \left(M - \frac{\partial \alpha_x}{\alpha}\right)$ und $F' = \partial N_x + N \cdot \left(M - \frac{\partial \alpha_x}{\alpha}\right) - \alpha$.

Setzt man nun statt der Gleichung (5.) die beiden Gleichungen

$$6) \left\{ \begin{array}{l} \partial z'_x + M' \cdot z' = z'' \\ \partial^2 z''_x + S' \cdot \partial^{1,1} z''_{x,y} + P' \cdot \partial z''_x + Q' \cdot \partial z''_y + N' \cdot z'' = \alpha' \cdot z' \end{array} \right\},$$

so erhält man zur Bestimmung der Werthe von $M'$, $S'$, ꝛc. ꝛc. ꝛc. ganz ähnliche Gleichungen, wie die obigen, zur Bestimmung von $M$, $S$, ꝛc. ꝛc. — Fährt man aber so fort, und findet sich zuletzt bei diesen auf einander folgenden Reduktionen einer der Werthe $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, ꝛc. ꝛc. der Null gleich, so sieht man die Integration der gegebenen Parzialgleichung der dritten Ordnung auf die einer lineären Gleichung der 2ten Ordnung reduzirt, wie solche im (§. 466.) bereits behandelt worden ist.

## §. 468.

Legendre hat auch die Gleichung von der Form

$$1) \qquad R \cdot \partial^2 z_x + S \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + T \cdot \partial^2 z_y = 0,$$

wenn R, S, T bloß die (durch p und q bezeichneten) Ableitungen $\partial z_x$ und $\partial z_y$ enthalten, auf diese andere zurückgeführt, nämlich auf

$$2) \qquad R \cdot \partial^2 v_q + S \cdot \partial^{1,1} v_{q,p} + T \cdot \partial^2 v_p = 0,$$

wo R, S, T dieselben sind. Man nimmt nämlich v so, daß, indem man x und y selber wieder als Funktionen von t sich denkt,

$$3) \qquad x \cdot \partial p + y \cdot \partial q = \partial v$$

wird, welches

$$4) \quad x = \partial v_p; \qquad 5) \quad y = \partial v_q,$$

und, wegen

$$z = \int(p\cdot\partial x + q\cdot\partial y)\cdot dt = p\cdot x + q\cdot y - \int(x\cdot\partial p + y\cdot\partial q)\cdot dt,$$

$$6) \qquad v = p\cdot x + q\cdot y - z$$

giebt.

## §. 469.

Monge hat auch noch die Gleichung

$$1) \quad (1+q^2)\cdot\partial^2 z_x - 2pq\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + (1+p^2)\cdot\partial^2 z_y = 0, \text{ *)}$$

wo p und q beziehlich die Ableitungen $\partial z_x$ und $\partial z_y$ bedeuten, behandelt. Nach (§. 468.) geht sie sogleich über in diese andere:

$$2) \quad (1+q^2)\cdot\partial^2 v_q + 2pq\cdot\partial^{1,1} v_{q,p} + (1+p^2)\cdot\partial^2 v_p = 0,$$

während x, y, z und v mittelst der Gleichungen (4. 5. u. 6. des §. 468.) zusammenhängen, so nämlich, daß man hat, nicht bloß

$$3) \quad \partial z_x = p \quad \text{und} \quad \partial z_y = q,$$

sondern auch

$$4) \quad \partial v_p = x; \qquad 5) \quad \partial v_q = y$$

und

$$6) \quad v = p\cdot x + q\cdot y - z. \text{ **)}$$

Behandelt man nun diese Gleichung (2.) nach (§. 458.), so

---

*) So findet sich die Gleichung für die kleinste Oberfläche zwischen gegebenen Grenzen.

**) Differenziirt man die Gleichungen (4. und 5.) nach allem p und nach allem q, so erhält man

$$\partial^2 v_p = \partial x_p; \quad \partial^{1,1} v_{p,q} = \partial x_q = \partial y_p \quad \text{und} \quad \partial^2 v_q = \partial y_q;$$

und man bemerkt nun bald, daß man die Gleichung (2.) wiederum in folgende umwandeln kann, nämlich in

$$(1+q^2)\cdot\partial^2 x_q + 2pq\cdot\partial^{1,1} x_{p,q} + (1+p^2)\cdot\partial^2 x_p + 2q\cdot\partial x_q + 2p\cdot\partial x_p = 0.$$

Aehnliche Gleichungen kann man in Bezug auf y und auch in Bezug auf z erhalten.

findet man, daß die Ausdrücke unter den willkührlichen Funktionszeichen von der Integration der Gleichungen

$$7) \qquad \partial p_q - m' = 0; \qquad \partial p_q - m'' = 0;$$

oder 8) $$(\partial p_q - m') \cdot (\partial p_q - m'') = 0;$$

d. h. von der Integration der Gleichung

$$9) \qquad (1+q^2) \cdot \partial p_q^{\,2} - 2pq \cdot \partial p_q + (1+p^2) = 0$$

abhängen, in so ferne $m'$ und $m''$ die beiden Werthe von $m$ sind, aus der Gleichung

$$10) \qquad (1+q^2) \cdot m^2 - 2pq \cdot m + (1+p^2) = 0.$$

Differenziirt man, um die totale Differenzialgleichung (9.) zwischen den beiden Veränderlichen $p$ und $q$ zu integriren, diese Gleichung (9.) nach allem $q$, so erhält man

$$2(1+q^2) \cdot \partial p_q \cdot \partial^2 p_q - 2pq \cdot \partial^2 p_q = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial^2 p_q = 0,$$

also 11) $$p = a \cdot q + \alpha;$$

wo $a$ und $\alpha$ zwei Konstanten sind, welche unter sich durch die Gleichung

$$12) \qquad 1 + a^2 + \alpha^2 = 0$$

zusammenhängen. Man findet daher zwei Integrale, nämlich:

13) $p = a \cdot q + \sqrt{-1-a^2}$ und 14) $p = b \cdot q - \sqrt{-1-b^2}$,

weil die Konstante $a$ ganz willkührlich ist, daher das zweitemal jede andere $b$ seyn kann. — Findet man hieraus $a$ und $b$, nämlich:

$$15) \qquad a = \frac{pq + \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}$$

und

$$16) \qquad b = \frac{pq - \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2},$$

so hat man die Ausdrücke, welche unter den willkührlichen Funktionszeichen im Ur-Integrale der gegebenen Parzialgleichung (2.) vorkommen.

Führt man statt der Veränderlichen $p$ und $q$ jetzt $a$ und

b, wie solche in (13.—16.) gegeben sind, als neue Veränderliche ein, so verwandelt sich die Gleichung (2.), wenn der Kürze wegen

17) $\sqrt{-1-a^2} = \alpha$ und 18) $\sqrt{-1-b^2} = \beta$

gesetzt wird, in

19) $$(a-b)\cdot\partial^{1,1}v_{a,b} - \frac{\alpha}{\beta}\cdot\partial v_a + \frac{\beta}{\alpha}\cdot\partial v_b = 0.$$

Diese Gleichung genügt jedoch der Bedingung ($\odot$) des (§. 465.) nicht.

Verwandelt man aber die Gleichung (2.) in diese andere:

20) $(1+q^2)\cdot\partial^2 x_q + 2pq\cdot\partial^{1,1}x_{p,q} + (1+p^2)\cdot\partial^2 x_p + 2q\cdot\partial x_q + 2p\cdot\partial x_p = 0,$

wie solches in der Note (pagina 149.) geschehen ist, und führt man hier diese neuen Veränderlichen a und b ein, so verwandelt sie sich in

21) $$\partial^{1,1}x_{a,b} = 0,$$

giebt also sogleich

22) $$x = \varphi_a + \psi_b.$$

Da man aber außer der Gleichung (20.) noch zwei ganz ähnliche Gleichungen in y und in z erhalten kann, so hat man auch noch zwei ähnliche Integrale, nämlich:

23) $$y = \varphi'_a + \psi'_b$$

und

24) $$z = \varphi''_a + \psi''_b;$$

wo jedoch zwischen den 6 Funktionen $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$, $\psi$, $\psi'$, $\psi''$ noch Abhängigkeiten statt finden, so daß nur deren zwei willkührlich bleiben, während, wenn man aus den 3 Gleichungen (22.—24.) sowohl p als auch q d. h. a und b eliminirt sich denkt, die Urgleichung zwischen x, y und z hervorgeht.

Um nun die Abhängigkeiten zwischen $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$, $\psi$, $\psi'$, $\psi''$ zu finden, bedenke man, daß die Gleichungen (22—24.) auch noch den Gleichungen (3—6.) zu genügen haben. Substituirt man aber den Werth aus (22.) statt x in die Gleichung (4.), so erhält man

25) $\partial v_p = \varphi_a + \psi_a$, also 26) $v = \int \varphi_a \cdot dp + \int \psi_a \cdot dp + \pi_q$,

wo $\pi_q$ die willkührliche Konstante vorstellt. Weil jedoch

$$\int \varphi_a \cdot dp = \int (\varphi_a \cdot \partial p_a) \cdot da$$

ist, während zwischen a und p die Gleichung (11.), nämlich

$$p = aq + \alpha_a, \quad \text{also} \quad \partial p_a = q + \partial \alpha_a$$

statt findet; und da ferner auch noch

$$\int \psi_a \cdot dp = \int (\psi_a \cdot \partial p_b) \cdot db$$

ist, während zwischen p und b die Gleichung

$$p = b \cdot q - \beta_b, \quad \text{also} \quad \partial p_b = q - \partial \beta_b$$

statt findet, so giebt die Gleichung (26.):

$$v = \int (q + \partial \alpha_a) \cdot \varphi_a \cdot da + \int (q - \partial \beta_b) \cdot \psi_b \cdot db + \pi_q;$$

oder, wenn man absondert, und den Rest theilweise integrirt,

27) $v = q(\int \varphi_a \cdot da + \int \psi_b \cdot db) + \alpha \cdot \varphi - \beta \cdot \psi_b - \int (\alpha_a \cdot \partial \varphi_a) \cdot da + \int (\beta_b \cdot \partial \psi_b) \cdot db + \pi_q;$

oder

28) $v = q \cdot (\varphi_a + \psi_b) + \alpha \cdot \partial \varphi_a - \beta \cdot \partial \psi_b - \int (\alpha_a \cdot \partial^2 \varphi_a) \cdot da + \int (\beta_b \cdot \partial^2 \psi_b) \cdot db + \pi_q;$

wenn man $\int \varphi_a \cdot da$ und $\int \psi_b \cdot db$

bloß durch $\varphi_a$ und $\psi_b$

vorstellt, so daß statt der Gleichung (22.) jetzt

29) $$x = \partial \varphi_a + \partial \psi_b$$

geschrieben werden muß. — Differenzirt man nun diesen Werth für v aus (28.) nach q, und substituirt ihn in die Gleichung (5.), so erhält man

30) $y = \varphi_a + \psi_b + (q + \partial \alpha_a) \cdot \partial a_q \cdot \partial \varphi_a + (q - \partial \beta_b) \cdot \partial b_q \cdot \partial \psi_b + \partial \pi_q.$

Weil man aber zwischen $\alpha$ und q, desgleichen zwischen $\beta$ und q, die Gleichungen

$$p = a \cdot q + \alpha_a \quad \text{und} \quad p = b \cdot q - \beta_b$$

hat, so folgt, wenn man diese nach allem q differenzirt,

$0 = a + (q + \partial\alpha_a)\cdot\partial a_q$ und $0 = b + (q - \partial\beta_b)\cdot\partial b_q$,

woraus dann, wenn man hieraus $\partial a_q$ und $\partial b_q$ findet und ihre Werthe in die (30.) substituirt,

31) $$y = (\varphi_a - a\cdot\partial\varphi_a) + (\psi_b - b\cdot\partial\psi_b) + \partial\pi_q$$

hervorgeht. Da aber nach (23.)

$$y = \varphi'_a + \psi'_b$$

seyn muß, so ist nicht nur $\partial\pi_q = 0$ zu nehmen, sondern man hat auch noch die Relationen

I. $\varphi'_a = \varphi_a - a\cdot\partial\varphi_a$ und II. $\psi'_b = \psi_b - b\cdot\partial\psi_b$.

Setzt man nun, weiter fortfahrend, diese Werthe von x, y und v aus (28. 29. u. 31.) in die Gleichung (6.), so findet man

$$z = \int\alpha_a\cdot\partial^2\varphi_a\cdot da - \int\beta_b\cdot\partial^2\psi_b\cdot db,$$

so daß man, wenn man diesen Werth von z mit der Gleichung (24.) vergleicht, noch die beiden andern Relationen

III. $\varphi''_a = \int a_\alpha\cdot\partial^2\varphi_a\cdot da$ und IV. $\psi''_b = -\int\beta_b\cdot\partial^2\psi_b\cdot db$

erhält. —

Das allgemeine Ur-Integral der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung

1) $(1 + \partial z_y^2)\cdot\partial^2 z_x - 2\partial z_x\cdot\partial z_y\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + (1 + \partial z_x^2)\cdot\partial^2 z_y = 0$

erhält man daher, wenn man aus folgenden 3 Gleichungen

32) $$\left.\begin{cases} x = \partial\varphi_a + \partial\psi_b \\ y = \varphi_a - a\cdot\partial\varphi_a + \psi_b - b\cdot\partial\psi_b \\ z = \int\alpha_a\cdot\partial^2\varphi_a\cdot da - \int\beta_b\cdot\partial^2\psi_b\cdot db \end{cases}\right\},$$

wo $\alpha_a = \sqrt{-1-a^2}$ und $\beta_b = \sqrt{-1-b^2}$ ist, die zwei Veränderlichen a und b eliminirt sich denkt; was nicht bewerkstelligt werden kann, so lange nicht statt $\varphi_a$ und $\psi_b$ bestimmte Funktionen von a und von b gesetzt werden.

Anmerkg. 1. Man kann dieses Resultat auch noch so umformen, daß die Integralzeichen herausfallen, wenn man jeden

$$\begin{cases} x = & \alpha_a^3\cdot\partial^2\Phi_a - & 3\alpha_a\cdot a & \cdot & \partial\Phi_a + \beta_b^3\cdot\partial^2\Psi_b - & 3\beta_b\cdot b & \cdot & \partial\Psi_b \\ y = & -\alpha_a^3\cdot a\cdot\partial^2\Phi_a + & (2a^2-1)\cdot\alpha_a\cdot\partial\Phi_a - & & \beta_b^3\cdot b\cdot\partial^2\Psi_b + & (2b^2-1)\cdot\beta_b\cdot\partial\Psi_b & & \\ z = & \alpha_a^4\cdot\partial^2\Phi_a - & 2\alpha_a^2\cdot a\cdot\partial\Phi_a + & \Phi_a & -\beta_b^4\cdot\partial^2\Psi_b + & 2\beta_b^2\cdot b\cdot\partial\Psi_b - & \Psi_b & \end{cases}\Bigg\}.$$

Anmerkg. 2. Monge hat dieses Integral zuerst gefunden. Unter den verschiedenen Wegen, welche er betreten hat, mag noch folgender hier erwähnt werden. — Er führt nämlich zwei neue Veränderliche a und b ein, d. h. er denkt sich x und y, also auch z, als Funktionen von a und b, und verwandelt nun die gegebene Parzialgleichung

1) $$(1+q^2)\cdot\partial^2 z_x - 2pq\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + (1+p^2)\cdot\partial^2 z_y = 0,$$

in welcher $q = \partial z_y$ und $p = \partial z_x$ ist, in eine andere, welche bloß Ableitungen nach a und b enthält, nämlich in diese:

$$2)\begin{cases} & (\partial x_b^2+\partial y_b^2+\partial z_b^2)\cdot(Z\cdot\partial^2 z_a + Y\cdot\partial^2 y_a + X\cdot\partial^2 x_a) \\ -2(\partial x_b\cdot\partial x_a+\partial y_b\cdot\partial y_a+\partial z_b\cdot\partial z_a) & (Z\cdot\partial^{1,1} z_{a,b}+Y\cdot\partial^{1,1} y_{a,b}+X\cdot\partial^{1,1} x_{a,b}) \\ + & (\partial x_a^2+\partial y_a^2+\partial z_a^2)\cdot(Z\cdot\partial^2 z_b + Y\cdot\partial^2 y_b + X\cdot\partial^2 x_b) \end{cases}\Bigg\} = 0$$

der beiden Theile von z zweimal hinter einander theilweise integrirt, d. h. die Formeln der (§. §. 225—226. d. V. Th. d. E.) in Anwendung bringt. Man erhält dann, wenn man

$$\int\partial^2\alpha_a\cdot\varphi_a\cdot da \text{ und } \int\partial^2\beta_b\cdot\psi_b\cdot db$$

beziehlich durch $\Phi_a$ und $\Psi_b$

bezeichnet, folgende 3 Gleichungen

wo der Kürze wegen

3) $Z = \partial x_a \cdot \partial y_b - \partial x_b \cdot \partial y_a$; $Y = \partial z_a \cdot \partial x_b - \partial z_b \cdot \partial x_a$

und $X = \partial y_a \cdot \partial z_b - \partial y_b \cdot \partial z_a$

gesetzt worden ist. Dieser Gleichung (2.) wird nun durch die 5 Gleichungen

4) $\begin{cases} \partial x_b^2 + \partial y_b^2 + \partial z_b^2 = 0; & \partial x_a^2 + \partial y_a^2 + \partial z_a^2 = 0; \\ \partial^{1,1} z_{a,b} = 0; & \partial^{1,1} y_{a,b} = 0; \quad \partial^{1,1} x_{a,b} = 0 \end{cases}$

genügt. Die 3 letztern, integrirt, geben

$x = \varphi_a + \psi_b$, $y = \varphi'_a + \psi'_b$ und $z = \varphi''_a + \psi''_b$;

und diese Werthe, in die beiden erstern substituirt, geben die Relationen

$$\partial\psi_b^2 + \partial\psi_b'^2 + \partial\psi_b''^2 = 0 \text{ und } \partial\varphi_a^2 + \partial\varphi_a'^2 + \partial\varphi_a''^2 = 0.$$

Man vermindert aber die Allgemeinheit dieses Resultats nicht, wenn man a und b statt $\varphi_a$ und $\psi_b$ setzt; also hat man als gesuchtes Integral der gegebenen Parzialgleichung (1.) das System der 3 Gleichungen

$$x = a + b$$
$$y = \varphi_a + \psi_b$$
$$z = \int \sqrt{-1 - \partial\varphi_a^2} \cdot da + \int \sqrt{-1 - \partial\psi_b^2} \cdot db,$$

aus denen nur noch a und b eliminirt gedacht werden müssen.

Man kann auch umgekehrt zeigen, daß dieses Integral der gegebenen Parzialgleichung wirklich genügt. *)

---

*) Auch in Lubbe's Körperlehre, Berlin 1828. pag. 198., ist dieses Integral auf einem Wege gefunden worden, welcher sich von den Wegen des Legendre noch unterscheidet. Wie man aber, ohne das Integral in einer algebraischen endlichen Form zu haben, Eigenschaften dieser kleinsten Fläche finden könne, darüber kann man in's Besondere eine Abhandlung von Scherk nachlesen, welche 1832 zu Leipzig bei Enoblauch unter dem Titel: de proprietatibus superficiei, quae hac continetur aequatione $(1+q^2) \cdot r - 2pq \cdot s + (1+p^2) \cdot t$, disquisitiones analyticae erschienen ist.

Anmerkg. Uebersieht man alles, was bis jetzt in diesem Kapitel über die Integration der Parzialgleichungen der 2ten und höhern Ordnungen in endlicher Form gelehrt worden, so findet man, daß fast nur solche Parzialgleichungen mit einigem Erfolg integrirt worden sind, denen ein erstes Integral zukommt. Weil wir aber in diesem Falle immer auf die Methode des (§. 322. d. V. Th. d. S.) zurückweisen mußten, als auf diejenige, welche die direktere ist, so wollen wir jetzt, ehe wir dieses Kapitel beschließen, diese eben erwähnte Methode des (§. 322. d. V. Th. d. S.) noch etwas näher betrachten, und besonders für die lineären Parzialgleichungen der 2ten Ordnung weitere Auseinandersetzungen geben, zuvor aber noch einiges zur Theorie der Parzialgleichungen hinzufügen, was über diese besonderen Untersuchungen mehr Licht zu verbreiten geeignet seyn dürfte.

## E. Noch einige theoretische Betrachtungen über die Parzialgleichungen der 2ten Ordnung.

### §. 470.

I. Eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung zwischen 3 Veränderlichen x, y und z, nämlich

$$1) \qquad F = 0,$$

hat entweder ein erstes Integral oder nicht (nach §. 322. d. V. Th. d. S.). Hat sie ein erstes Integral, so kann dasselbe zwei willkührliche Konstanten a und b haben; solches kann durch

$$2) \qquad V_{x,y,z,p,q,a,b} = 0 \text{ *)}$$

bezeichnet, und ein vollständiges erstes Integral der gegebenen $F = 0$ genannt werden. Es kann aber dieselbe Parzialgleichung $F = 0$ auch ein erstes Integral mit einer willkührlichen Funktion $\varphi_\omega$ haben, wo $\omega$ eine bestimmte Funktion von x, y, z ist (welche wohl auch p und q in sich aufgenommen haben kann); und dieses erste Integral

*) Unter p und q werden hier allemal beziehlich die Ableitungen $\partial z_x$ und $\partial z_y$ verstanden.

3) $$W_{x,y,z,p,q,\phi} = 0$$

mag dann das allgemeine heißen.

II. Denkt man sich in dem vollständigen ersten Integrale

$$V_{x,y,z,p,q,a,b} = 0$$

unter b eine willkührliche Funktion von a, etwa

4) $$b = b_a,$$

und denkt man sich zu gleicher Zeit unter a eine solche Funktion von x, y, z, p und q, daß die Ableitungen $\partial V_{(x)}$, $\partial V_{(y)}$ der Form nach dieselben bleiben, wie wenn a und b konstant wären; nimmt man also

5) $$V_{x,y,z,p,q,a,b} = 0$$

und

6) $$\partial V_a + \partial V_b \cdot \partial b_a = 0,$$

und eliminirt man aus beiden Gleichungen (5. und 6.) den Veränderlichen a; oder vielmehr bestimmt man aus (6.) die Funktion a, und substituirt man solche in die Gleichung (5.), so ist diese Gleichung (5.), sobald man unter a diese Funktion versteht, zu gleicher Zeit das allgemeine erste Integral von $F = 0$, mit der willkührlichen Funktion $b_a$, während a eine bestimmte Funktion von x, y und z geworden ist.

Existirt aber ein solches allgemeines erstes Integral nicht in algebraischer endlicher Form, so ist das System der beiden Gleichungen (5. und 6.) doch als Stellvertreter des allgemeinen Integrals anzusehen. (Vgl. §. 444.).

III. Wird das vollständige erste Integral

$$V_{x,y,z,p,q,a,b} = 0$$

der Parzialgleichung $F = 0$, mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b, wiederum integrirt, so kann man entweder ein Ur-Integral mit 4 willkührlichen Konstanten a, b, c und d erhalten, oder ein Ur-Integral mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b, so wie noch mit einer willkührlichen Funktion $\psi_{\omega'}$. — Wird aber das allgemeine erste Integral

$$W_{x,y,z,p,q,\Phi_\omega} = 0$$

der Parzialgleichung $F = 0$ noch einmal integrirt, so kann man entweder ein Ur-Integral

$$V'_{x,y,z,\Phi_\omega,c,d} = 0$$

bekommen, welches außer $\varphi_\omega$ noch zwei willkührliche Konstanten c und d enthält, oder man bekommt ein Ur-Integral

$$W'_{x,y,z,\Phi,\Psi} = 0,$$

welches außer $\varphi_\omega$ noch eine willkührliche Funktion $\psi_\omega$, in sich aufnimmt. Dies letztere $W' = 0$ findet man aber wieder aus ersterem $V' = 0$, wenn man unter d eine willkührliche Funktion von c sich denkt, dann aber c aus der Gleichung

$$\partial V'^{c} + \partial V'_{d} \cdot \partial d^{\cdot}_{c} = 0$$

dazu bestimmt.

IV. Hat eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung ein Ur-Integral mit 5 willkührlichen Konstanten, so wird man zu der Parzialgleichung $F = 0$ gelangen, wenn man aus den 6 Gleichungen

$$U = 0, \quad \partial U_{(x)} = 0, \quad \partial U_{(y)} = 0, \quad \partial^2 U_{(x)} = 0,$$
$$\partial^{1,1} U_{(x,y)} = 0, \quad \partial^2 U_{(y)} = 0$$

die 5 Konstanten auf einmal eliminirt. Man wird aber zuweilen zu derselben Parzialgleichung $F = 0$ auch dadurch geführt werden können, daß man aus

$$U = 0, \quad \partial U_{(x)} = 0 \quad \text{und} \quad \partial U_{(y)} = 0$$

zuerst zwei der 5 Konstanten eliminirt, dann aber, wenn solche Eliminationsgleichung

$$T = 0$$

wäre, aus

$$T = 0, \quad \partial T_{(x)} = 0 \quad \text{und} \quad \partial T_{(y)} = 0$$

auf's neue zwei Konstanten fortschafft, in so ferne die 5te Konstante von selber mit wegfallen kann. Dies letztere wird aber dann eintreten, wenn die gegebene Parzialgleichung ein erstes Integral hat.

V. Hat jedoch eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung ein allgemeines Ur-Integral in endlicher algebraischer Form, wie wir solche im (V. Th. d. S. §. 305.) festgestellt haben, nämlich von der Form

$$W_{x,y,z,v} = 0, \quad \text{wo} \begin{cases} \text{entweder} & v = \varphi_\omega + \psi_{\omega'} \\ \text{oder} & v = \varphi_\omega + \omega' \cdot \psi_\omega \end{cases} \text{ ist,}$$

so hat dasselbe allemal auch ein allgemeines erstes Integral in endlicher Form.

Denn es sey erstlich $v = \varphi_\omega + \psi_{\omega'}$; so hat man

$$\partial v_{(x)} = \partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_{(x)} + \partial\psi_{\omega'} \cdot \partial\omega'_{(x)};$$
$$\partial v_{(y)} = \partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_{(y)} + \partial\psi_{\omega'} \cdot \partial\omega'_{(y)}.$$

Eliminirt man daher aus $W = 0$ und aus

$$\partial W_{(x)} = \partial W_x + \partial W_z \cdot \partial z_x + \partial W_v \cdot \partial v_{(x)} = 0,$$
$$\partial W_{(y)} = \partial W_y + \partial W_z \cdot \partial z_y + \partial W_v \cdot \partial v_{(y)} = 0,$$

sowohl v, als auch $\partial\varphi_\omega$; so erhält man eine Parzialgleichung der 1sten Ordnung, welche weder v, noch $\varphi$, noch $\partial\varphi_\omega$; auch nicht $\psi$, sondern nur noch $\partial\psi_{\omega'}$ enthält, und welche durch

$$U_{x,y,z,p,q,\mu} = 0, \quad \text{wo} \quad \mu = \partial\psi_{\omega'} \quad \text{ist,}$$

bezeichnet seyn kann. — Eliminirt man nun wieder aus $U = 0$ und aus

$$\partial U_{(x)} = \partial U_x + \partial U_z \cdot p + \partial U_p \cdot \partial^2 z_x + \partial U_q \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + \partial U_\mu \cdot \partial\mu_{\omega'} \cdot \partial\omega'_{x)} = 0;$$
$$\partial U_{(y)} = \partial U_y + \partial U_z \cdot q + \partial U_p \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + \partial U_q \cdot \partial^2 z_y + \partial U_\mu \cdot \partial\mu_{\omega'} \cdot \partial\omega'_{(y)} = 0$$

sowohl $\mu$ (d. h. $\partial\psi_{\omega'}$), als auch $\partial\mu_{\omega'}$; so erhält man eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung, welche von den willkührlichen Funktionen $\varphi$ und $\psi$ keine Spur mehr enthält, und welche daher mit der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung zusammenfallen muß, während $U = 0$ ein erstes Integral der-

selben ist, mit einer durch $\mu$ oder $\partial\psi_\omega$, bezeichneten willkührlichen Funktion. *)

Ist aber zweitens $v = \varphi_\omega + \omega' \cdot \psi_\omega$; so ist

$$\partial v_{(x)} = (\partial\varphi_\omega + \omega' \cdot \partial\psi_\omega) \cdot \partial\omega_{(x)} + \psi_\omega \cdot \partial\omega'_{(x)},$$
$$\partial v_{(y)} = (\partial\varphi_\omega + \omega' \cdot \partial\psi_\omega) \cdot \partial\omega_{(y)} + \psi_\omega \cdot \partial\omega'_{(y)}.$$

Eliminirt man daher aus $W = 0$ und aus

$$\partial W_{(x)} = \partial W_x + \partial W_z \cdot \partial z_x + \partial W_v \cdot \partial v_{(x)} = 0,$$
$$\partial W_{(y)} = \partial W_y + \partial W_z \cdot \partial z_y + \partial W_v \cdot \partial v_{(y)} = 0,$$

sowohl $v$ als auch $\partial\varphi_\omega + \omega' \cdot \partial\psi_\omega$; so erhält man eine Parzialgleichung der 1sten Ordnung, welche noch $\psi_\omega$ aber sonst nichts von den willkührlichen Funktionen enthält, und welche durch

$$U'_{x,y,z,p,q,\psi} = 0$$

bezeichnet seyn kann. — Aus den Gleichungen

$$U' = 0, \quad \partial U'_{(x)} = 0 \quad \text{und} \quad \partial U'_{(y)} = 0$$

kann man dann wieder die darin vorkommenden Ausdrücke $\psi_\omega$ und $\partial\psi_\omega$ eliminiren, und man wird zu einer Parzialgleichung der 2ten Ordnung gelangen, welche keine Spur mehr von den willkührlichen Funktionen enthält, welche daher mit der gegebenen Parzialgleichung $F = 0$ zusammenfallen muß, während $U' = 0$ ihr erstes Integral ist. **)

VI. So oft daher eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung kein erstes Integral hat, so oft hat sie auch kein allgemeines Ur-Integral in der allgemeinen algebraischen endlichen Form des (§. 305. d. V. Th. d. S.). Eine solche Parzialgleichung kann dann ein Ur-Integral mit 5 willkührlichen Konstanten, auch ein allge-

---

*) Daß man das erste Mal auch $v$ und $\partial\psi_\omega$, eliminiren, und dadurch noch zu einem neuen ersten Integrale gelangen kann, welches die andere willkührliche Funktion $\partial\varphi\omega$ enthält, versteht sich dabei von selbst.

**) Hier kann man nicht in umgekehrter Ordnung eliminiren, also auf diesem Wege nicht noch ein anderes erstes Integral erhalten.

meines Integral mit zwei willkührlichen Funktionen in der algebraischen endlichen Ausnahmsform (für bestimmte spezielle Werthe von $\omega$ und $\omega'$), oder endlich eines jener allgemeinen Ur-Integrale mit zwei willkührlichen Funktionen in endlicher Form haben, welche entweder durch Systeme zweier oder mehrerer Gleichungen ausgedrückt werden, oder welche noch Differenzial- oder gar noch Integralformen in sich aufgenommen haben, so daß sie als noch nicht wirklich hergestellt angesehen werden müssen, und höchstens die Stellvertreter der Integrale in endlicher Form genannt werden können.

VII. Man kann sich noch fragen, wie die Parzialgleichung der 2ten Ordnung beschaffen seyn müsse, wenn sie ein allgemeines erstes Integral mit einer willkührlichen Funktion $\varphi_\omega$ haben soll, während $\omega$ außer x, y, z selbst, noch p und q in sich aufnimmt? — Löst man aber dieses allgemeine erste Integral nach $\varphi_\omega$ auf, so daß es die Form annimmt

1) $$f_{x,y,z,p,q} = \varphi_\omega,$$

so hat man, wenn man solches nach allem x differenziirt, und dann noch nach allem y, und wenn man der größern Bequemlichkeit wegen die Ableitungen

$$\partial^2 z_{x,} \quad \partial^{1,1} z_{x,y} \text{ und } \partial^2 z_y$$

beziehlich durch

$$r, \quad s \text{ und } t$$

bezeichnet,

2) $$\partial f_x + \partial f_z \cdot p + \partial f_p \cdot r + \partial f_q \cdot s = \partial \varphi_\omega \cdot (\partial \omega_x + \partial \omega_z \cdot p + \partial \omega_p \cdot r + \partial \omega_q \cdot s),$$

3) $$\partial f_y + \partial f_z \cdot q + \partial f_p \cdot s + \partial f_q \cdot t = \partial \varphi_\omega \cdot (\partial \omega_y + \partial \omega_z \cdot q + \partial \omega_p \cdot s + \partial \omega_q \cdot t).$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen (2. u. 3.) die Ableitung $\partial \varphi_\omega$, so erhält man eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung von der Form:

4) $$(\partial f_q \cdot \partial \omega_p - \partial f_p \cdot \partial \omega_q) \cdot (s^2 - rt) + A \cdot r + B \cdot s + C \cdot t + D = 0,$$

wo A, B, C, D bloß x, y, z, p und q enthalten. Diese Gleichung (4.) ist nur dann lineär, wenn

$$\partial f_q \cdot \partial \omega_p - \partial f_p \cdot \partial \omega_q = 0$$

ist, also natürlich auch allemal, so oft $\partial \omega_p = \partial \omega_q = 0$ ist, d. h. so oft $\omega$ nicht p und nicht q, also höchstens x, y und z enthält.

Ist also eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung von der Form

5) $$E \cdot (s^2 - r \cdot t) + A \cdot r + B \cdot s + C \cdot t + D = 0$$

gegeben, wo E, A, B, C, D gegebene Funktionen von x, y, z, p und q vorstellen, so hat man, im Falle man das allgemeine erste Integral von der Form (1.) voraussetzt, sogleich

$$\partial f_q \cdot \partial \omega_p - \partial f_p \cdot \partial \omega_q = E,$$

während man noch ähnliche 4 Gleichungen bekommt, um daraus die Bestimmung von f und von $\omega$ versuchen zu können.

Und ist die gegebene Parzialgleichung lineär, ist also $E = 0$, so kann man noch $\omega$ von p und q befreit sich denken, obgleich dies, dem eben gesagten zufolge, nicht nothwendig der Fall seyn muß.

## F. Weitere Ausführung der Methode des (§. 322. d. V. Th. d. S.) für die Integration derjenigen Parzialgleichungen der 2ten oder höheren Ordnung, welche ein erstes Integral haben, in Bezug auf die lineären Parzialgleichungen der 2ten Ordnung.

### §. 471.

Schließlich wollen wir nun die Methode des (§. 322. d. V. Th. d. S.) in ihrer Anwendung auf lineäre Parzialgleichungen der 2ten Ordnung noch etwas weiter verfolgen.

A. Man setze nämlich:

1) $$\partial z_x = p \quad \text{und} \quad \partial z_y = q,$$

so wird

2) $$\partial^2 z_x = \partial p_x, \quad \partial^{1,1} z_{x,y} = \partial p_y = \partial q_x \quad \text{und} \quad \partial^2 z_y = \partial q_y.$$

Ist nun gegeben die lineäre Parzialgleichung der 2ten Ordnung

3) $M+N\cdot\partial^2 z_x+P\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}+Q\cdot\partial^2 z_y=0,$

wo M, N, P und Q gegebene Funktionen von x, y, z, p und q sind; ist ferner

4) $W_{x,y,z,p,q}=0$

das Integral der ersten Ordnung, dessen Existenz vorausgesetzt wird; und differenziirt man die Gleichung (4.) nach allem x und nach allem y, so daß man erhält:

5) $\partial W_x+\partial W_z\cdot p+\partial W_p\cdot\partial^2 z_x+\partial W_q\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}=0$

und

6) $\partial W_y+\partial W_z\cdot q+\partial W_p\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}+\partial W_q\cdot\partial^2 z_y=0;$

so muß die Gleichung (3.) identisch werden, wenn man in sie statt $\partial^2 z_x$ und $\partial^2 z_y$ ihre aus (5. und 6.) gezogenen Werthe substituirt. Weil aber diese Substitution eine Gleichung giebt, welche aus zwei Theilen besteht und deren einer Theil den Faktor $\partial^{1,1}z_{x,y}$ enthält, so zerfällt solche sogleich in die beiden Gleichungen

I. $N\cdot\partial W_q^2-P\cdot\partial W_q\cdot\partial W_p+Q\cdot\partial W_p^2=0$

und

II. $M-N\cdot\dfrac{\partial W_x+p\cdot\partial W_z}{\partial W_p}-Q\cdot\dfrac{\partial W_y+q\cdot\partial W_z}{\partial W_q}=0,$

wie wir bereits (pag. 370. des V. Th. d. S.) gefunden haben.

B. Es muß nun zunächst die (I.) als eine Parzialgleichung der 1sten Ordnung zwischen den 6 Veränderlichen W, x, y, z, p und q integrirt werden, nach dem vorhergehenden Kapitel; dann aber muß man die dabei eingehende willkührliche Funktion von 4 Veränderlichen $\omega, \omega', \omega''$ und $\omega'''$ aus der Gleichung (II.) dergestalt näher bestimmen, daß auch noch der Gleichung (II.) ein Genüge geschieht.

Die Gleichung (I.) zerfällt aber, wenn man die beiden Werthe von m aus der Gleichung

7) $N\cdot m^2-P\cdot m+Q=0,$

welche

8) $m=\dfrac{P\pm\sqrt{P^2-4NQ}}{2N}$

liefert, durch $m'$ und $m''$ bezeichnet, in die beiden Gleichungen

I·1. $\partial W_q - m' \cdot \partial W_p = 0$ oder I·2. $\partial W_q - m'' \cdot \partial W_p = 0$,

wo $m'$ und $m''$ bekannte Funktionen der 5 Veränderlichen $x$, $y$, $z$, $p$ und $q$ vorstellen. Diese beiden Gleichungen können aber durch

III. $$\partial W_q - m \cdot \partial W_p = 0$$

vorgestellt werden.

C. Integrirt man nun die (III.) als eine lineäre Parzialgleichung der ersten Ordnung zwischen den 6 Veränderlichen $W$, $x$, $y$, $z$, $p$ und $q$, welche auch so geschrieben werden kann, nämlich

9) $$\partial W_q - m \cdot \partial W_p + 0 \cdot \partial W_x + 0 \cdot \partial W_y + 0 \cdot \partial W_z = 0,$$

so hängt ihre Integration nach (§. 431.) von der Integration der totalen Gleichungen

10) $$\frac{\partial q}{1} = -\frac{\partial p}{m} = \frac{\partial x}{0} = \frac{\partial y}{0} = \frac{\partial z}{0} = \frac{\partial W}{0}$$

ab, welche zunächst $x$, $y$, $z$ und $W$ Konstanten gleich geben, etwa $x = c_1$, $y = c_2$, $z = c_3$ und $W = c_4$,

während dann zuletzt $\frac{\partial q}{1} = -\frac{\partial p}{m}$ d. h.

11) $$\partial p + m \cdot \partial q = 0$$

zu integriren bleibt, unter der Voraussetzung, daß $x$, $y$ und $z$ als konstant behandelt werden; alles genau nach den Vorschriften des (§. 431.). — Integrirt man nun diese (11.) in dieser Beziehung, so daß man

12) $$T_{p,q,x,y,z} = c$$

als Integral der (11.) erhält, so hat man zuletzt als Integral der (I·1.)

13) $c_4 = \Psi_{c,c_1,c_2,c_3}$ d. h. $W = \Psi_{T,x,y,z}$

welches auch in einer der 4 folgenden Formen:

14) $W = T + \psi_{x,y,z} = 0$ oder 15) $W = z + \psi_{T,x,y} = 0$

oder

16) $W = y + \psi_{T,x,z} = 0$ oder 17) $W = x + \psi_{T,y,z} = 0$

erscheinen kann, wenn nur jedesmal $\psi$, so wie $\Psi$, eine ganz willkührliche Funktion der ihr rechts unten angehängten Ausdrücke ist.

D. Diese Funktion $\psi$ näher zu bestimmen, ist nun das nächste, was man zu thun hat. Sie muß aus der Gleichung (II.) bestimmt werden. Diese Gleichung (II.) wird aber, wenn man aus (III.) $m \cdot \partial W_p$ statt $\partial W_q$ setzt, und mit $m \cdot \partial W_p$ wegmultiplizirt, zunächst folgende:

IV. $M \cdot m \cdot \partial W_p - N \cdot m \cdot (\partial W_x + p \cdot \partial W_z) - Q \cdot (\partial W_y + q \cdot \partial W_z) = 0,$

dann aber, wenn man z. B. aus der ersten Form (14.)

$$T + \psi_{x,y,z} \text{ statt } W$$

setzt,

18) $M \cdot m \cdot \partial T_p - N \cdot m \cdot (\partial T_x + \partial \psi_x + p \cdot \partial T_z + p \cdot \partial \psi_z) - Q \cdot (\partial T_y + \partial \psi_y + q \cdot \partial T_z + q \cdot \partial \psi_z) = 0.$

Und bedenkt man, daß in dieser Gleichung alle p und alle q von selbst herausfallen müssen, weil $\psi$ weder p noch q enthält, so wird diese Gleichung (18.) in den einzelnen Beispielen noch in mehrere Gleichungen zerfallen, welche dann alle zur Bestimmung von $\psi_{x,y,z}$ dienen, aber auch sich widersprechen können, so daß in letzterem Falle die Voraussetzung der Existenz eines ersten Integrals $W = 0$ von der gedachten Form, sich nicht bestätigt findet.

E. Das ganze praktische Verfahren, um das erste Integral

$$W = 0$$

der gegebenen lineären Parzialgleichung der 2ten Ordnung

$$M + N \cdot \partial^2 z_x + P \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + Q \cdot \partial^2 z_y = 0$$

zu finden, ist daher folgendes: Man löst zunächst die Gleichung (7.) auf, um die Werthe von m in (8.) zu erhalten. Man integrirt dann die Gleichung (11.), indem man x, y, z als konstant ansieht, und bringt dieses Integral auf die Form (12.), nämlich auf die Form $T_{x,y,z,p,q} = c.$ — Nun nimmt man

14) $$W = T + \psi_{x,y,z} = 0$$

und bestimmt $\psi$ noch aus der Gleichung (18.) dazu, entweder indem man aus letzterer alle p und q von selbst wegfallen läßt; oder indem man aus (14.) p findet, diesen Werth in (18.) substituirt und dann bloß noch alle q von selbst wegfallen läßt.

F. In einzelnen Fällen kann es rathsam werden, statt der Form (14.) von W, eine der übrigen Formen aus (15. 16. oder 17.) zu nehmen. Dann muß man aber die willkührliche Funktion $\psi$ aus der Gleichung (IV.) bestimmen, welcher noch ganz allgemein für jede der Formen von W genügt werden muß, während die (18.) bereits unter der Voraussetzung der bestimmten Form (14.) von W, statt findet.

G. Weil aber statt m zuerst m′, dann noch m″ gesetzt werden kann, so wird man dadurch in der Regel unmittelbar zwei erste Integrale erhalten, wenigstens so lange nicht $m' = m''$ ist.

Nehmen wir nun einige Beispiele, und zwar, um noch instruktiver zu werden, zunächst die Beispiele des (§. 458.), welche daselbst bereits nach der mitgetheilten Methode des Monge behandelt worden sind.

Beispiel 1. Ist gegeben die Parzialgleichung

$$A \cdot \partial^2 z_x + B \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + C \cdot \partial^2 z'_y = V_{x,y}$$

in welcher A, B und C beliebig konstant seyn mögen, so sind hier m′ und m″ konstant, und so, daß

$$m' \cdot m'' = \frac{C}{A}, \quad \text{aber} \quad m' + m'' = -\frac{B}{A}$$

ist. Die Gleichung (11.), wenn man sogleich m′ statt m setzt und integrirt, giebt

$$T = p + m' \cdot q = c;$$

und die Gleichung (18.) wird nun, da

$$M = -V, \quad N = A, \quad P = B \quad \text{und} \quad Q = C$$

ist, folgende:

$$-V_{x,y} \cdot m' - A \cdot m' \cdot (\partial\psi_x + p \cdot \partial\psi_z) - C \cdot (\partial\psi_y + q \cdot \partial\psi_z) = 0,$$

und giebt, da p und q herausfallen müssen, zunächst

$$\partial\psi_z = 0, \quad \text{also} \quad \psi = \psi_{x,y}$$

und noch

$$m' \cdot V_{x,y} + m' \cdot A \cdot \partial\psi_x + C \cdot \partial\psi_y = 0.$$

Integrirt man aber diese Parzialgleichung der 1sten Ordnung zwischen den 3 Veränderlichen V, x und y, so hängt ihre Integration nach (§. 429.) von der Integration der totalen Gleichungen

$$\frac{\partial x}{m' \cdot A} = \frac{\partial y}{C} = -\frac{\partial\psi}{m' \cdot V_{x,y}}$$

ab, während die erstere derselben, d. h., weil $A \cdot m' \cdot m'' = C$ ist, die Gleichung $m'' \cdot \partial x = \partial y,$

sogleich $m'' \cdot x + a = y$ oder $y - m'' \cdot x = a$

liefert. Die andere,

$$\frac{\partial x}{m' \cdot A} = -\frac{\partial\psi}{m' \cdot V_{x,y}} \quad \text{oder} \quad \partial\psi = -\frac{1}{A} \cdot V_{x,y} \cdot \partial x,$$

giebt dann

$$\psi + \frac{1}{A} \cdot U'' = c_1,$$

wenn $U''$ das Integral $\int V \cdot dx$ vorstellt, unter der Voraussetzung, daß vor der Integration $m'' \cdot x + a$ statt y gesetzt worden, nach beendigter Integration aber wiederum statt a sein Werth $y - m'' \cdot x$.

Das Integral selbst zur Bestimmung von $\psi$ wird nun

$$\psi + \frac{1}{A} \cdot U'' = \varphi''_{y - m'' \cdot x},$$

wenn $\varphi''$ eine ganz beliebige Funktion vorstellt. — Und das gesuchte erste Integral $W = T + \psi = 0$ wird daher jetzt

$$p + m' \cdot q - \frac{1}{A} \cdot U'' + \varphi''_{y - m'' \cdot x} = 0,$$

welches, wenn man $\frac{C}{A \cdot m''}$ statt $m'$ setzt, genau mit dem im (§. 458. Beisp. 1.) gefundenen Resultate zusammenfällt.

Beispiel 2. Ist zu integriren die Parzialgleichung

$$x^2 \cdot \partial^2 z_x + 2xy \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + y^2 \cdot \partial^2 z_y = 0,$$

so hat man hier

$$M = 0, \quad N = x^2, \quad P = 2xy, \quad Q = y^2;$$

also $$m = m' = m'' = \frac{y}{x}.$$

Die Gleichung (11.), nämlich

$$\partial p + \frac{y}{x} \cdot \partial q = 0,$$

integrirt, giebt nun

$$T = p + \frac{y}{x} \cdot q = c,$$

so daß das gesuchte erste Integral

$$(\odot)\cdots \qquad p + \frac{y}{x} \cdot q + \psi_{x,y,z} = 0$$

seyn wird.

Die Gleichung (18.) zur Bestimmung von $\psi$ wird nun

$$(\mathbb{C})\cdots \qquad x \cdot (\partial\psi_x + p \cdot \partial\psi_z) + y \cdot (\partial\psi_y + q \cdot \partial\psi_z) = 0,$$

und zerfällt, da p und q von selbst wegfallen müssen, in

$$\partial\psi_z = 0, \quad \text{also} \quad \psi = \psi_{x,y},$$

und noch in

$$x \cdot \partial\psi_x + y \cdot \partial\psi_y = 0,$$

welche letztere, nach (§. 429.) integrirt,

$$\psi = \varphi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{y}{x} \qquad \text{ist,}$$

liefert. — Das gesuchte erste Integral der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung ist daher jetzt dieses:

$$p + \frac{y}{x} \cdot q + \varphi_{y:x} = 0,$$

welches Resultat im (Beispiel 2. zu §. 458.) ebenfalls gefunden worden ist.

Man kann aber auch in die Gleichung ($\mathbb{C}$) statt p den aus der Gleichung ($\odot$) selbst gezogenen Werth $-\frac{y}{x} \cdot q - \psi$ substituiren. Dann erhält man zur Bestimmung von $\psi$ die Gleichung

$$\partial\psi_x + \frac{y}{x} \cdot \partial\psi_y - \psi \cdot \partial\psi_z = 0;$$

und wenn man diese Gleichung der ersten Ordnung zwischen den 4 Veränderlichen x, y, z und $\psi$ nach Vorschrift des vorhergehenden Kapitels integrirt, so erhält man

$$\psi = -\frac{z}{x} + \frac{1}{x} \cdot f_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{y}{x} \qquad \text{ist.}$$

Man hat daher noch ein anderes erstes Integral der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung, nämlich

$$p + \frac{y}{x} \cdot q - \frac{z}{x} + \frac{1}{x} \cdot f_{y:x} = 0. \text{ *)}$$

---

*) Man kann auch die obige Gleichung

$$\partial p + \frac{1}{x} \cdot \partial q = 0 \quad \text{in der Form} \quad x \cdot \partial p + y \cdot \partial q = 0$$

integriren, und man erhält

$$x \cdot p + y \cdot q = c.$$

Man hat also dann als erstes Integral

$$x \cdot p + y \cdot q + \psi_{x,y,z} = 0,$$

und $\psi$ aus der Gleichung (18.) dazu zu suchen.

Diese Gleichung (18.) giebt aber nun

$$(\sigma) \cdots \quad x \cdot (\partial \psi_x + p + p \cdot \partial \psi_z) + y \cdot (\partial \psi_y + q + q \cdot \partial \psi_z) = 0,$$

und zerfällt jetzt in

$$1 + \partial \psi_z = 0 \quad \text{und} \quad x \cdot \partial \psi_x + y \cdot \partial \psi_y = 0.$$

Die erstere dieser nächst vorstehenden Gleichungen giebt:

$$\partial \psi_z = -1, \quad \text{also} \quad \psi_z = -z + \varphi_{x,y};$$

dies in die zweite substituirt, giebt

$$x \cdot \partial \varphi_x + y \cdot \partial \varphi_y = 0,$$

und diese, integrirt, giebt

$$\varphi = \varphi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = y:x \quad \text{ist.}$$

Also hat man als erstes Integral

$$x \cdot p + y \cdot q - z + \varphi_{y:x} = 0.$$

Setzt man aber in die Gleichung ($\sigma$) statt p abermals seinen Werth $-\frac{y \cdot q + \psi}{x}$, so erhält man

$$x \cdot \partial \psi_x + y \cdot \partial \psi_y - \psi \cdot \partial \psi_z - \psi = 0,$$

und diese Gleichung, integrirt, giebt

$$\psi = x \cdot \varphi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{y}{x} \quad \text{ist.}$$

Also hat man abermals ein erstes Integral, nämlich

$$x \cdot p + y \cdot q + x \cdot \varphi_{y:x} = 0.$$

Beispiel 3. Ist gegeben die Gleichung

$$q^2 \cdot \partial^2 z_x - 2p \cdot q \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + p^2 \cdot \partial^2 z_y = 0,$$

so hat man

$$M = 0, \quad N = q^2, \quad P = -2pq, \quad Q = p^2,$$

$$m = m' = m'' = -\frac{p}{q}.$$

Die Gleichung (11.) wird jetzt

$$\partial p - \frac{p}{q} \cdot \partial q = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial p}{p} - \frac{\partial q}{q} = 0,$$

und giebt, integrirt,

$$\frac{p}{q} = c.$$

Das erste Integral ist daher jetzt

$$\frac{p}{q} + \psi_{x,y,z} = 0,$$

während $\psi$ bestimmt wird, in so ferne wir dasmal

$$T = \frac{p}{q}$$

haben, durch die Gleichung

$$q \cdot \partial \psi_x - p \cdot \partial \psi_y = 0,$$

---

Man sieht so dieselben beiden ersten Integrale wie oben gefunden, aber in umgekehrter Ordnung.

Ueberhaupt kann es nicht entgehen, daß man das Integral der Gleichung (11.), wenn solches

$$T_{x,y,z,p,q} = c$$

gefunden worden ist, auch sogleich so nehmen kann, nämlich

$$\Pi_{x,y,z} \cdot T_{x,y,z,p,q} = c,$$

wo $\Pi_{x,y,z}$ irgend eine bestimmte Funktion von x, y und z ist, weil bei dieser Integration, dem Willen der Methode gemäß, x, y und z als konstant angesehen werden müssen. — Man kann also sowohl in dem ersten Integrale (14.), nämlich in

$$T + \psi_{x,y,z} = 0,$$

als auch in der Gleichung (18.), zur Bestimmung von $\psi$, recht füglich $\Pi \cdot T$ statt T setzen, und man wird allemal $\psi$ dazu finden, und zum ersten Integrale der gegebenen Parzialgleichung gelangen.

in welche die Gleichung (18.) jetzt übergeht, und welche in

$$\partial\psi_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial\psi_y = 0$$

zerfällt, so daß $\psi = \psi_{z_1}$ wird. — Das gesuchte erste Integral ist daher

$$\frac{p}{q} + \psi_z = 0 \quad \text{oder} \quad p + q\cdot\psi_z = 0;$$

genau so, wie solches auch im (Beisp. 3. zu §. 458.) gefunden worden ist.

Beispiel 4. Ist gegeben die Parzialgleichung

$$(1+q^2+pq)\cdot\partial^2 z_x + (q^2-p^2)\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} - (1+p^2+pq)\cdot\partial^2 z_y = 0,$$

so ist jetzt

$$M = 0, \quad N = 1+q^2+pq, \quad P = q^2-p^2 \quad \text{und} \quad Q = -(1+p^2+pq);$$

$$\text{und} \quad m' = 1, \quad \text{so wie} \quad m'' = -\frac{1+p^2+pq}{1+q^2+pq};$$

die Gleichung (11.) für $m = m' = 1$, nämlich

$$\partial p + \partial q = 0,$$

giebt jetzt, wenn sie integrirt wird,

$$p + q = c.$$

Daher ist das gesuchte erste Integral jetzt

$$(\odot)\cdots \qquad p + q + \psi_{x,y,z} = 0,$$

wo $\psi$ noch zu bestimmen ist aus der Gleichung (18.), welche jetzt folgende wird, nämlich

$$(\sigma)\cdots \quad (1+q^2+pq)\cdot(\partial\psi_x + p\cdot\partial\psi_z) - (1+p^2+pq)\cdot(\partial\psi_y + q\cdot\partial\psi_z) = 0.$$

Dieser Gleichung kann aber unabhängig von den Werthen von p und q nur dadurch genügt werden, daß man

$$\partial\psi_x = \partial\psi_y = \partial\psi_z = 0$$

nimmt, also $\psi$ selbst konstant; und so sieht man sich zunächst zu einem besondern ersten Integrale, nämlich zu

$$p + q = c$$

geführt, welches keine willkührliche Funktion enthält, welches aber nichts desto weniger der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung genügt.*)

---

*) Eigentlich muß man in die Gleichung ($\sigma$) statt p seinen aus ($\odot$) gezogenen Werth $-q-\psi$ substituiren, und dann alle q von selbst wegfallen lassen, wenn man das allgemeinste Integral haben will. Kann

Nimmt man den andern Werth von m, nämlich:

$$m = m'' = -\frac{1+p^2+pq}{1+q^2+pq},$$

so wird die Gleichung (11.) jetzt folgende:

$$\partial p - \frac{1+p^2+pq}{1+q^2+pq} \cdot \partial q = 0,$$

und diese giebt, wenn sie integrirt wird, *)

$$\frac{p-q}{\sqrt{2+(p+q)^2}} = c,$$

so daß das erste Integral (14.) jetzt

$$\frac{p-q}{\sqrt{2+(p+q)^2}} + \psi_{x,y,z} = 0$$

wird, während $\psi$ noch bestimmt werden muß, aus der Gleichung (18.), die jetzt folgende wird, nämlich

$$(\mathfrak{C})\cdots \qquad \partial\psi_x + \partial\psi_y + (p+q)\cdot\partial\psi_z = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt nun in

$$\partial\psi_z = 0 \quad \text{und} \quad \partial\psi_x + \partial\psi_y = 0,$$

giebt daher $\psi = \varphi_\omega$, wo $\omega = y-x$ ist.

Das gesuchte erste Integral ist daher

$$\frac{p-q}{\sqrt{2+(p+q)^2}} + \varphi_{y-x} = 0;$$

wie wir solches auch im (Beispiel 4. zu §. 458.) gefunden haben.

Anmerkung. Wendet man dieselbe Methode auf die speziellere Gleichung des (§. 459.), nämlich auf die Gleichung

$$R\cdot\partial^2 z_x + S\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + T\cdot\partial^2 z_y + P\cdot p + Q\cdot q + N\cdot z = M$$

---

aber das letztere dadurch gefunden werden, daß man diese Substitution vermeidet, und sogleich alle p und alle q von selbst wegfallen läßt, so werden in der Regel die Rechnungen einfacher.

*) Diese Integration bewerkstelligt sich am leichtesten, wenn man statt der Veränderlichen p und q, zwei neue Veränderliche $\alpha$ und $\beta$ einführt mittelst der Gleichungen

$$\alpha = p+q \quad \text{und} \quad \beta = p-q.$$

(Vgl. Beisp. 4. zu §. 458.).

an, wo R, S, T, P, Q, N, M als Funktionen bloß von x und y allein angesehen sind, so hätte man in dem vorstehenden (§. 471.)

$$P{\cdot}p+Q{\cdot}q+N{\cdot}z-M \quad \text{statt} \quad M,$$

dagegen R, S, T beziehlich statt N, P, Q zu substituiren. Die Gleichung (11.) giebt nun, da

$$m = \frac{S \pm \sqrt{S^2-4RT}}{2R}$$

bloß x und y enthält, und weder p noch q, — wenn man sie integrirt — sogleich

$$p+m{\cdot}q = c,$$

so daß das gesuchte erste Integral die Form

$$(\odot)\cdots \qquad p+m{\cdot}q+\psi_{x,y,z} = 0$$

annimmt. — Die Gleichung (18.) wird jetzt

$$(\mathbb{C})\cdots \left.\begin{array}{l} P{\cdot}m{\cdot}p+Q{\cdot}m{\cdot}q+N{\cdot}m{\cdot}z-M{\cdot}m- \\ R{\cdot}\ {\cdot}(\partial m_x{\cdot}q+\partial\psi_x+p{\cdot}\partial\psi_z)-T{\cdot}(\partial m_y{\cdot}q+\partial\psi_y+q{\cdot}\partial\psi_z) \end{array}\right\} = 0,$$

und zerfällt daher jetzt, weil sie unabhängig von p und q statt finden soll, in die 3 Gleichungen

$$P-R{\cdot}\partial\psi_z = 0; \quad Q{\cdot}m-R{\cdot}m{\cdot}\partial m_x-T{\cdot}\partial m_y-T{\cdot}\partial\psi_z = 0$$

und

$$N{\cdot}m{\cdot}z-M{\cdot}m-R{\cdot}m{\cdot}\partial\psi_x-T{\cdot}\partial\psi_y = 0.$$

Aus der ersten dieser 3 Gleichungen folgt

$$\partial\psi_z = \frac{P}{R}, \quad \text{also} \quad \psi = \frac{P}{R}{\cdot}z+\varphi_{x,y}.$$

Dieser Werth, in die beiden übrigen Gleichungen substituirt, da die letztere wiederum in zwei zerfällt, giebt:

$$1) \qquad Q{\cdot}m-R{\cdot}m{\cdot}\partial m_x-T{\cdot}\partial m_y-T{\cdot}\frac{P}{R} = 0,$$

$$2) \qquad N{\cdot}m-R{\cdot}m{\cdot}\partial\left(\frac{P}{R}\right)_x-T{\cdot}\partial\left(\frac{P}{R}\right)_y = 0$$

und

$$3) \qquad Mm-Rm{\cdot}\partial\varphi_x-T{\cdot}\partial\varphi_y = 0;$$

wovon die beiden erstern Bedingungsgleichungen sind, welche von den Koeffizienten der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung erfüllt seyn müssen, wenn auf diesem Wege ein erstes Integral soll gefunden werden; während die dritte Gleichung zur Bestimmung von $\varphi$ dient.

Substituirt man aber in die Gleichung (ℂ) den Werth für p aus (⊙), was man allemal thun muß, wenn man das allgemeinste Integral haben will, so zerfällt die Gleichung (ℂ), da sie jetzt bloß unabhängig von q gelten soll, nur in zwei Gleichungen, nämlich in

$$(R \cdot m^2 - T) \cdot \partial\psi_z - P \cdot m^2 + Q \cdot m - R \cdot m \cdot \partial m_x - T \cdot \partial m_y = 0$$

und

$$-P \cdot m \cdot \psi + N \cdot m \cdot z - M \cdot m - R \cdot m \cdot \partial\psi_x - T \cdot \partial\psi_y + R \cdot m \cdot \psi \cdot \partial\psi_z = 0.$$

Die erstere Gleichung giebt

$$\partial\psi_z = \gamma, \quad \text{also} \quad \psi = \gamma \cdot z + \varphi_{x,y},$$

wenn der Kürze wegen

$$\frac{P \cdot m^2 - Q \cdot m + Rm \cdot \partial m_x + T \cdot \partial m_y}{R \cdot m^2 - T}$$

durch $\gamma$ bezeichnet wird. Wird nun dieser Werth $\gamma \cdot z + \varphi$ statt $\psi$ in die andere Gleichung subſtituirt, so zerfällt solche wieder, da $\varphi$ kein $z$ enthält, da diese Gleichung also unabhängig von $z$ statt finden muß, in

$$4) \quad -P \cdot m \cdot \gamma + N \cdot m - R \cdot m \cdot \partial\gamma_x - T \cdot \partial\gamma_y + R \cdot m \cdot \gamma^2 = 0$$

und

$$5) \quad (R\gamma - P)m \cdot \varphi - M \cdot m - R \cdot m \cdot \partial\varphi_x - T \cdot \partial\varphi_y = 0,$$

wovon die (4.) eine Bedingungsgleichung ist, während die (5.) zur Bestimmung von $\varphi$ dient.

In dem besondern Falle, wo R, S, T, P, Q, N konstant sind, und bloß M allein eine Funktion von x und y ist, hat man m konstant, also

$$\partial m_x = \partial m_y = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{(P \cdot m - Q) \cdot m}{R \cdot m^2 - T};$$

so wie noch $\partial\gamma_x = \partial\gamma_y = 0.$

Die Bedingungsgleichung (4.) wird nun bloß

(♂)… $$R \cdot \gamma^2 - P \cdot \gamma + N = 0,$$

und um die Gleichung (5.) zur Bestimmung von $\varphi$ bequemer integriren zu können, bezeichne man die beiden Werthe von m durch $m'$ und $m''$, so daß

$$m' \cdot m'' = \frac{T}{R}$$

ist, und setze in den hier vorstehenden Gleichungen $m'$ statt m, so daß man

1′) $$\gamma = \frac{(P \cdot m' - Q) \cdot m'}{R \cdot m'^2 - T}$$ und 2′) $$R \cdot \gamma^2 - P \cdot \gamma + N = 0$$

als Bedingungsgleichungen hat. — Bezeichnet man dann durch n das, was aus $\gamma$ wird, wenn man $m''$ statt m setzt, so daß

3′) $$n = \frac{(P \cdot m'' - Q) \cdot m''}{R \cdot m''^2 - T}$$ wird, so ist 4′) $$\gamma + n = \frac{P}{R},$$

also $\gamma = \frac{P}{R} - n$; und setzt man diesen Werth statt $\gamma$ in die Bedingungsgleichung (♂), so erhält man dieselbe Bedingungsgleichung auch in der Form

(♂′)… $$R \cdot n^2 - P \cdot n + N = 0.$$

Die Gleichung (5.) zur Bestimmung von $\varphi$ wird nun, wenn man sogleich statt $\gamma$ seinen Werth aus (4′.), so wie statt T seinen Werth $m' \cdot m'' \cdot R$ setzt,

5′) $$n \cdot \varphi + \frac{1}{R} \cdot M + \partial\varphi_x + m'' \cdot \partial\varphi_y = 0.$$

Um diese Gleichung einfacher zu machen, kann man noch

6′) $$\varphi_{x,y} = e^{-n \cdot x} \cdot \Pi_{x,y}$$

setzen, und die Gleichung (5′.) geht sogleich in diese

7′) $$\frac{1}{R} \cdot M \cdot e^{nx} + \partial\Pi_x + m'' \cdot \partial\Pi_y = 0$$

über, welche, integrirt,

8′) $$\Pi = -\frac{1}{R} \cdot \int M \cdot e^{nx} \cdot dx + \Phi_{y - m'' \cdot x}$$

liefert, wenn man nur in dem Theil $\int M \cdot e^{nx} \cdot dx$ vor der Integration nach allem x, statt y die Summe $m'' \cdot x + a$, nach der Integration aber sogleich wieder statt a die Differenz $y - m'' \cdot x$ substituirt, wie dies die Integration der lineären Parzialgleichung nach (§. 429.)

so verlangt. — Das gesuchte erste Integral ist daher

$$p + m' \cdot q + \gamma \cdot z - \frac{e^{-nx}}{R} \cdot \int M \cdot e^{nx} \cdot dx + e^{-nx} \cdot \Phi_{y - m'' \cdot x} = 0. \text{ *)}$$

Vergleicht man aber diese Resultate mit den für dieselbe Gleichung in dem (§. 459. und in dem zugehörigen Beispiel 1. daselbst) gefundenen, so ergiebt sich bei dem ersten Anblick, daß die hiesige Methode, ihres direktern und einfachern, naturgemäßern Ganges wegen, jener des Monge vorzuziehen seyn dürfte.

## §. 472.

Denkt man sich das allgemeine erste Integral einer gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung als nothwendig eine willkührliche Funktion $\varphi_\omega$ enthaltend, wo $\omega$ im Allgemeinen eine gegebene Funktion von x, y, z, p und q seyn wird, dagegen für unsre spezielle Gleichung, welche in Bezug auf die Ableitungen der 2ten Ordnung lineär ist, meist bloß x, y und z allein enthalten wird, so kann man sich dieses erste Integral

$$1) \qquad W = 0$$

in Bezug auf die willkührliche Funktion $\varphi_\omega$ algebraisch aufgelößt denken, also in der Form

$$2) \qquad W' + \varphi_\omega = 0.$$

Da nun diese Gleichung (1.) der gegebenen Parzialgleichung

$$3) \qquad M + N \cdot \partial^2 z_x + P \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + Q \cdot \partial^2 z_y = 0$$

genügen muß, welche bestimmte Funktion auch statt $\varphi_\omega$ gesetzt werden mag, also wenn auch Null statt $\varphi_\omega$ gesetzt wird, so folgt,

---

*) Setzt man hier statt $m'$ seinen Werth $\frac{T}{m'' \cdot R}$, und $\frac{P}{R} - n$ statt $\gamma$; und multiplizirt man die ganze Gleichung mit $m'' \cdot R$, so erhält man noch dasselbe Integral in nachstehender Form:

$$m'' \cdot R \cdot p + T \cdot q + m'' \cdot (P - nR) \cdot z - m'' \cdot e^{-n \cdot x} \cdot \int M \cdot e^{nx} \cdot dx + e^{-n \cdot x} \cdot \varphi_{y - m'' \cdot x} = 0,$$

indem man den konstanten Faktor $m'' \cdot R$ in die willkührliche Funktion $\varphi$ mit hinein zieht.

daß für W′ dieselben beiden Gleichungen (§. 471. A. I. und II. oder B. III. und D. IV.) statt finden müssen, nur W′ statt W geschrieben. Weil aber die Gleichung (2.) der gegebenen (3.) auch noch genügen muß, wenn $\omega$ statt $\varphi_\omega$ gesetzt wird, so folgt, daß die Gleichungen (§. 471. B. III. und D. IV.) auch dann noch statt finden müssen, wenn $W'+\omega$ statt W geschrieben wird. Und geschieht dies letztere, so hebt sich wieder wegen der lineären Form dieser Gleichungen (III. und IV.) alles W′ von selbst weg, vermöge derselben Gleichungen (III. und IV.), die für $W = W'$ schon gelten. — Und so zeigt sich dann, daß W′ und auch $\omega$ genau aus denselben beiden Gleichungen (§. 471. B. III. und D. IV.) gefunden werden, indem man daselbst zuerst W′ statt W, nachher aber auch $\omega$ statt W substituirt.

Man kann also jetzt statt W′ und $\omega$ irgend Werthe von W setzen, welche weder eine willkührliche Konstante, noch eine willkührliche Funktion zu enthalten brauchen, von denen aber jeder den beiden Gleichungen (§. 471. B. III. und D. IV.), nämlich den Gleichungen

III. $$\partial W_q - m \cdot \partial W_p = 0$$

und

IV. $$M \cdot m \cdot \partial W_p - N \cdot m \cdot (\partial W_x + p \cdot \partial W_z) - Q \cdot (\partial W_y + q \cdot \partial W_z) = 0,$$

genügt. Nimmt man zuletzt

$$W' + \varphi_\omega = 0,$$

so hat man das gesuchte allgemeine erste Integral der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung

$$M + N \cdot \partial^2 z_x + P \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + Q \cdot \partial^2 z_y = 0.$$

## §. 473.

Bezeichnet man die beiden Werthe von m aus der Gleichung

$$N \cdot m^2 - P \cdot m + Q = 0$$

durch $m'$ und $m''$, so daß man

$$m' \cdot m'' = \frac{Q}{N} \quad \text{d. h.} \quad Q = m' \cdot m'' \cdot N$$

hat, so lassen sich die Gleichungen (III. und IV.) zur Bestimmung des ersten Integrals $W = 0$ oder $W' + \varphi_\omega = 0$, auch noch so schreiben, nämlich

III. $$\partial W_q - m' \cdot \partial W_p = 0$$

und

IV. $$\frac{M}{N} - (\partial W_x + p \cdot \partial W_z) - m'' \cdot (\partial W_y + q \cdot \partial W_z) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich nun noch neue Parzialgleichungen der 1sten Ordnung ableiten.

Differenziirt man nämlich die (III.) nach allem x, die (IV.) dagegen nach allem q, eliminirt man nachgehends aus beiden Resultaten die Ableitung $\partial^{1,1} W_{x,q}$, und substituirt man zuletzt wiederum in diesem Resultate statt $\partial W_q$ und $\partial W_x$ ihre Werthe aus (III. und IV.), so erhält man noch

V. $$a \cdot \partial W_y + b \cdot \partial W_z + c \cdot \partial W_p = 0,$$

wenn man der Kürze wegen

1) $$\begin{cases} \partial m'_q - m' \cdot \partial m''_p = a, & m'' - m' + q \cdot a = b \\ \text{und} \\ \partial m'_x + m'' \cdot \partial m'_y + (p + m'' \cdot q) \cdot \partial m'_z \\ \qquad + m' \cdot \partial \left(\frac{M}{N}\right)_p - \frac{M}{N} \cdot \partial m'_p - \partial \left(\frac{M}{N}\right)_q = c \end{cases}$$

gesetzt hat.

Schafft man auf dieselbe Weise zwischen den Gleichungen (III. und V.) die Ableitungen $\partial W_z$ und $\partial W_q$ fort, so erhält man noch

VI. $$d \cdot \partial W_y + e \cdot \partial W_p = 0,$$

wenn wiederum der Kürze wegen

2) $$\begin{cases} b \cdot \partial \left(\frac{a}{b}\right)_q - m' \cdot b \cdot \partial \left(\frac{a}{b}\right)_p = d \\ \text{und} \\ a \cdot \partial m'_y + b \cdot \partial m'_z + c \cdot \partial m'_p + b \cdot \partial \left(\frac{c}{b}\right)_q - m' \cdot b \cdot \partial \left(\frac{c}{b}\right)_p = e \end{cases}$$

gesetzt worden ist.

Schafft man endlich zwischen (III. u. IV.) auf dieselbe Weise die Ableitungen $\partial W_y$ und $\partial W_q$ fort, so ergiebt sich noch

VII. $$f \cdot \partial W_p = 0,$$

wenn der Kürze wegen

3) $$d \cdot \partial m'_y + e \cdot \partial m'_p + d \cdot \partial \left(\frac{e}{d}\right)_q - m' \cdot d \cdot \partial \left(\frac{e}{d}\right)_p = f$$

gesetzt wird.

Diese Gleichung (VII.) führt daher zu der Bedingungsgleichung

(⊙)... $$f = 0,$$

welche erfüllt seyn muß, wenn ein erstes Integral möglich seyn soll.

Da nun in der Regel Werthe von W, welche zweien der Gleichungen (III.—VI.) genügen, auch den beiden Gleichungen (III. und IV.) genügen werden, die von dem ersten Integrale $W = 0$ identisch werden müssen, so kann man das Verfahren des (§. 471.) danach noch auf verschiedene Weise modifiziren, wenn man sich nur zuletzt überzeugt, daß den Gleichungen (III. und IV.) wirklich genügt ist. *)

Anmerkung 1. Wir könnten noch nach mancher Seite hin mehr in das Detail eingehen, wenn uns nicht die dem Lehrbuche vorgeschriebene Kürze davon abhalten müßte. Namentlich könnte noch der Fall der Gleichung

$$M + N \cdot \partial^2 z_x + P \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + Q \cdot \partial^2 z_y = 0$$

mehr in das Auge gefaßt werden, in welchem zwei der 3 Koefizienten N, P und Q zu gleicher Zeit Null sind; u. dgl. mehr.

---

*) Wenn man diese letzteren beiden (§. §. 472. u. 473.) vorzugsweise berücksichtigt, so fällt man wesentlich mit derjenigen Methode zusammen, welche Lubbe in seinem Lehrbegriff der höhern Körperlehre für die Integration dieser lineären Gleichung der 2ten Ordnung zuerst gegeben hat. Hier geht dieselbe als eine unmittelbare Folge des (§. 471.) hervor, während (§. 471.) selbst als eine nothwendige Folge der theoretischen Untersuchungen (des §. 322. d. V. Th. d. S.) erscheint.

Einiges von diesem Detail findet man noch in dem oben bereits angeführten „Lehrbuch der Körperlehre" Berlin 1828. von Lubbe.

Besonders aber heben wir noch hervor, daß die Methode des (§. 322. d. V. Th. d. S.) auch auf nicht lineäre Parzialgleichungen der 2ten Ordnung versucht werden kann, im Falle sie ein erstes Integral in algebraischer endlicher Form haben, was bei dieser Methode immer vorausgesetzt wird.

## Schluß-Anmerkung.

Da eine Parzialgleichung zum Stellvertreter des Integrals in endlicher Form auch ein System von 2 oder mehr Gleichungen, oder ein solches Integral haben kann, welches noch Differenzial- oder Integralformen (neben den Ur-Formen) in sich aufnimmt, so geht aus dieser Betrachtung leicht die Folgerung hervor, daß man auf jede Integration in endlicher Form keinen zu großen Werth legen dürfe. Dies machen wir außerdem noch durch folgende Betrachtungen anschaulich:

Die Zahlen

**1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000** ꝛc. ꝛc.

haben eine Kubikwurzel in endlicher Form; alle zwischenliegenden ganzen Zahlen dagegen haben keine solche Kubikwurzel, sondern es existirt für alle die letztern Zahlen nur eine Kubikwurzel in Form einer unendlichen Reihe, welche wir in den Elementen eine irrationale Zahl nennen. — Also giebt es unter den ganzen Zahlen nur einige wenige Ausnahmsfälle, in denen eine Kubikwurzel derselben in endlicher Form existirt.

Aehnliches gilt für alle Wurzeln; ähnliches für die Logarithmen der ganzen Zahlen (für irgend eine bestimmte Basis). — Die Wurzeln und die Logarithmen der (ganzen) Zahlen existiren also nur in sehr wenigen Ausnahmsfällen in endlicher Form.

Aehnliches gilt aber noch mehr für Wurzeln oder Logarithmen zwischen gegebenen Buchstaben-Ausdrücken. Nur in Ausnahmsfällen existiren sie in endlicher Form.

Wenn Wurzeln und Logarithmen, weil sie indirekte Verbin-

dungen sind, nur gleichsam in wenigen Ausnahmsfällen in eine endliche Form umgeformt werden können, sobald die Bedingung gestellt ist, daß sie nicht selber wieder in Wurzeln oder Logarithmen ausgedrückt seyn sollen; so kann man sich nicht wundern, wenn dies auch mit dem Integrale der Fall ist, weil das Integriren ebenfalls eine indirekte Operation ist, dem Differenziiren entgegengesetzt.

Im 4ten Theile dieses Systems haben wir nun bereits gesehen, in wie wenigen besonders aufgezählten Fällen das Integral $\int X \cdot dx$ in endlicher Form wirklich herzustellen ist. — In dem 6ten Theile d. S. dagegen, hielten wir eine totale Differenzialgleichung zwischen zwei Veränderlichen bereits für integrirt in endlicher Form, wenn wir für y eine Zusammensetzung aus x gefunden hatten, in welcher selber noch ein solches angezeigtes Integral $\int X \cdot dx$ vorkam, oder wohl schon, wenn wir eine Gleichung zwischen x und y in endlicher Form gefunden hatten, in welcher mehrere solche angezeigte Integrale $\int X \cdot dx$, $\int Y \cdot dy$, ꝛc. ꝛc. noch vorkamen; — obgleich letztere nur ausnahmsweise in endlicher Form herzustellen seyn werden.

Hernach hielten wir in dem vorliegenden 7ten Theile d. S. wieder das Integriren der Parzialgleichungen für durchgeführt, sobald wir sie auf solche totale Differenzialgleichungen zurückgeführt sahen, deren Integration theoretisch nichts mehr im Wege lag; — obgleich das wirkliche Integriren derselben in endlicher Form wiederum nur ausnahmsweise wird durchgesetzt werden können.

Nimmt man noch dazu, daß die allgemeinen Integrale in endlicher Form, welche für die Parzialgleichungen hergestellt werden konnten, in der Regel in einer Gestalt erscheinen, welche für die Brauchbarkeit dieser Resultate in den Anwendungen wenig Hoffnung übrig läßt, so wird man das Integriren in endlicher Form, wie wir solches bis jetzt getrieben haben, in Bezug auf die Anwendungen wenigstens, nothwendig für sehr illusorisch halten müssen, und als nur in äußerst seltenen Fällen wirklich durchführbar.

Nichts destoweniger ist die Kenntniß der Untersuchungen des 6ten und 7ten Theils d. S. von einem unberechenbaren Werthe, einmal weil in sehr vielen Anwendungen wirklich nur so einfache Fälle vorkommen, daß das hier Erlernte hinreicht, um die gewünschten Resultate in endlicher Form zu liefern; — und dann auch, weil gerade nur die genauere Kenntniß dieser hier entwickelten Lehren uns in den Stand setzt, in vorkommenden Fällen der Anwendung uns schnell zurecht zu finden, und sicher genug zu erkennen, wohin man vorzüglich sein Augenmerk in jedem gegebenen Einzelfalle zu richten habe, um mit größeren Hoffnungen einem gewünschten Erfolge entgegen sehen zu können.

Wenn wir endlich in dem 5ten Theile dieses Systems bereits die Integrationen in unendlicher Form für alle totalen und Parzial-Differenzialgleichungen gelehrt haben, so haben wir doch jedesmal nur eine einzige Form solcher unendlichen Reihen hingestellt, nämlich solche, die nach den Potenzen eines der Veränderlichen x, oder höchstens nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufen. Sollen aber die Resultate in Form von unendlichen Reihen die gehörige Brauchbarkeit haben, so muß die Form der Reihe selbst, der jedesmaligen Natur des Einzelfalles entsprechend gewählt werden; — und um dies mit der nöthigen Umsicht thun zu können, ist eine vollständigere Kenntniß der unendlichen Reihen, als wir sie bis jetzt (im 2ten Theile dieses Systems) geben konnten, nothwendig. Deshalb werden wir in den zwei folgenden Theilen dieses Werkes uns bemühen, eine vollständigere Theorie dieser Reihen, nebst deren Anwendungen, so weit als dies bei dem gegenwärtigen Zustand unsrer Analysis möglich seyn wird, und so weit wir es für unser Lehrbuch für nöthig erachten müssen, vorzutragen.

Endlich bemerken wir noch vorläufig, daß die Integralrechnung jedesmal alle Integrale einer gegebenen Differenzialgleichung zu finden hat, letztere mag eine totale oder eine parzielle seyn. Alle Integrale sind aber in der Regel in dem allgemeinen Integrale enthalten. Das allgemeine Integral enthält in ersterem Falle (in welchem die gegebenen Differenzialgleichungen

totale sind) eine oder mehrere willkührliche Konstanten, im andern Falle (von Parzialgleichungen) eine oder mehrere willkührliche Funktionen. In den verschiedenen, aber gleichartigen Anwendungen, in welchen man zu einer und derselben Differenzialgleichung geführt wird, muß man nun erst unter allen verschiedenen Integralen der letzten für jeden besonderen Fall dasjenige heraussuchen, welches noch den übrigen, diesen Fall von jedem andern unterscheidenden, Bedingungen entspricht; d. h. in jedem besondern Falle der Anwendung kann man erst die willkührlichen Konstanten oder die willkührlichen Funktionen so bestimmen, daß das Integral auch noch den letztern (Neben-) Bedingungen der Aufgabe genügt.

Im Allgemeinen kann man also nur für vorausgesetzte Fälle die Konstanten oder die willkührlichen Funktionen bestimmen, wie wir dieses in Bezug auf die, bei der Integration der lineären totalen Differenzialgleichungen eingehenden, willkührlichen Konstanten bereits im 6ten Theile dieses Lehrbuchs beispielsweise gethan haben.

Hinsichtlich der Bestimmung der willkührlichen Funktionen, welche bei der Integration der Parzialgleichungen eingehen, werden wir in den folgenden Theilen dieses Systems noch Gelegenheit haben, ähnliche beispielsweise durchgeführte Betrachtungen statt finden zu lassen. Im Allgemeinen mag daher hier vorläufig nur noch folgendes darüber gesagt werden.

So wie nämlich in den Anwendungen die eingehenden willkührlichen Konstanten allemal dadurch bestimmt werden, daß man zusammengehörige Ziffern-Werthe der Veränderlichen und ihrer Ableitungen kennt, und diese in die Integralgleichungen substituirt, um Gleichungen bloß zwischen den Konstanten und Ziffernwerthen zu haben; — eben so muß man die bei der Integration der Parzialgleichungen eingehenden willkührlichen Funktionen dadurch zu bestimmen trachten, daß man noch aus den Nebenbedingungen der Aufgabe besondere Gleichungen zwischen den Veränderlichen $x$, $y$, $z$, &c. &c. sich verschafft, denen das Integral genügen, d. h. mit denen das Integral zusammenfallen muß.

# Höhere Zahlenlehre.

## Ein und zwanzigstes Kapitel.

## Die allgemeinste Lehre vom Größten und Kleinsten.

### Vorerinnerung.

Bereits im (IV. Th. d. S. in der 4ten Abth. des 5ten Kapitels) haben wir Aufgaben gegeben, welche zur Lehre vom Größten und Kleinsten gehören, ja selbst eine, wenn auch wenig umfassende Theorie dieser Lehre. Gegen Ende jener Abtheilung (§. 148. d. IV. d. S.) haben wir dagegen schon die allgemeinste Theorie angedeutet, und es bleibt uns daher zur Vervollständigung dieser Lehre hier nichts weiter zu thun übrig, als dasjenige Detail noch nachzuliefern, welches dort in Ermangelung der dazu nöthigen Lehren noch nicht gegeben werden konnte. Wir empfehlen aber dem Anfänger, ehe derselbe das nun Folgende lies't, vorher jene angeführte Abtheilung noch einmal von vorne herein ganz durchzustudiren, um das Gegenwärtige als die Fortsetzung unmittelbar daran anknüpfen zu können. Außerdem müssen wir den Anfänger noch darauf aufmerksam machen, daß in den nächsten Anwendungen immer solche Reihen-Entwicklungen vorkommen, wie sie im (XI. Kap. d. V. Th. d. S.) ausführlich behandelt worden sind. Wenn daher in den nächstfolgenden Lehren Schwierigkeiten aufsteigen sollten, so mag man solche zunächst dadurch zu heben versuchen, daß man dieses so eben angeführte Kapitel noch einmal recht gründlich durchstudirt, und sich den Inhalt desselben sowohl, als die dort gebrauchte Bezeichnung recht gut zu eigen macht.

Wir beginnen aber hier mit der Wiederholung jenes (§. 148. d. IV. Th. d. S.).

## §. 474.

### Allgemeinste Aufgabe des Größten und Kleinsten.

Ist V eine Funktion von beliebigen Veränderlichen, mit oder ohne deren Ableitungen, mit oder ohne Integrale derselben, ja mit oder ohne, uns zur Zeit noch unbekannten Ausdrucksformen, und stellt $V_\varkappa$ dieselbe auf eine beliebige, aber in jedem Falle gegebene, Weise durch $\varkappa$ variirte Funktion V vor, (d. h. diejenige Funktion, welche aus V hervorgeht, wenn man statt eines, oder statt einiger, oder statt aller ihrer Veränderlichen

$$x,\ y,\ z,\ \partial y_x,\ \partial z_x,\ \text{ꝛc.}\quad \partial^{1,1}u_{x,y}\ \text{ꝛc.}\quad \int_{b\div a} y\cdot dx,\quad \int_{m\div n} U_{x,y,\partial y}\cdot dx,\ \text{ꝛc.}$$

unendliche Reihen setzt, die beziehlich mit x, y, z, ꝛc. ꝛc. selbst anfangen, aber nach Potenzen eines im Moment des Verschwindens gedachten $\varkappa$ fortlaufen), so liefert $V_\varkappa$, je nachdem $\varkappa$ positiv oder negativ gedacht wird, zwei an V nächst angrenzende Werthe, beide nach dem (11ten Kap. d. V. Th. d. S.) durch

$$V+\delta V\cdot\varkappa+\delta^2V\cdot\frac{\varkappa^2}{2!}+\delta^3V\cdot\frac{\varkappa^3}{3!}+\cdots$$

vorgestellt. *) Man soll nun die Bedingungen aufsuchen, unter welchen V größer als diese beiden nächsten, durch $V_\varkappa$ vorgestellten, Nachbarwerthe ist (wo dann V, gegen letztere gehalten, ein Maximum genannt wird), oder bestimmen, wann V kleiner als diese beiden Nachbarwerthe $V_\varkappa$, (d. h. ein Minimum) ist.

Auflösung. Da

$$V_\varkappa - V = \delta V\cdot\varkappa+\delta^2V\cdot\frac{\varkappa^2}{2!}+\delta^3V\cdot\frac{\varkappa^3}{3!}+\cdots$$

ist, so kann dieser Unterschied $V_\varkappa - V$ nicht immer einerlei (+

---

*) Wo $\delta V,\ \delta^2V,\ \delta^3V,$ ꝛc. ꝛc. die nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze, und nach dem daraus abgeleiteten praktischen Verfahren des (11. Kap. d. V. Th. d. S.) zu findenden Koeffizienten vorstellen.

oder —) Zeichen behalten bei dem Uebergang des $x$ vom Positiven zum Negativen, so lange das Glied $\delta V \cdot x$ (welches mit $x$ zugleich sein + oder —Zeichen wechselt, und dessen + oder — Zeichen, wegen des im Moment des Verschwindens befindlichen $x$, das des ganzen Unterschiedes $V_x - V$ ist) noch vorhanden ist. Also ist

$$\text{I.} \qquad \delta V = 0$$

eine Bedingung, welche erfüllt seyn muß, wenn überhaupt ein Maximum oder Minimum soll statt finden können.

Ist dann noch $\delta^2 V \left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, so ist $V_x - V$ (weil $\delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!}$ mit $\delta^2 V$ einerlei + oder —Zeichen behält, es mag $x$ positiv oder negativ genommen werden) allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, d. h. V selbst allemal ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$.

Machen aber die Werthe von $y$, $z$, ꝛc. ꝛc., welche aus $\delta V = 0$ sich ergeben, welche also $\delta V$ zu Null machen, zugleich auch $\delta^2 V = 0$, so müssen dieselben auch $\delta^3 V = 0$ und $\delta^4 V \left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ machen, wenn V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ werden soll; — u. s. f.

Weil aber die Gleichung

$$V_x - V = \delta V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

aus dem Maclaurin'schen Lehrsatze erhalten wird, so wäre es auch möglich, daß die besondern Werthe, welche V gegen $V_x$ zu einem Maximum oder Minimum machen, entweder $\delta V$, oder doch $\delta^2 V$ oder $\delta^3 V$, ꝛc. auf die Form $\frac{1}{0}$ bringen, so daß die obigen Schlüsse nicht mehr ungeändert statt finden könnten. Ist aber dann $\delta V$ noch nicht von der Form $\frac{1}{0}$, so ist doch noch immer nach (§. 103. d. IV. Th. d. S.)

$$V_x - V = \delta V \cdot x + P \cdot x^{\alpha} + \cdots,$$

wo $\alpha > 1$ ist, so, daß das (+ oder —) Zeichen dieses Unter-

schiedes $V_{x}-V$ mit dem von $x$ zugleich wechseln, also V gegen $V_{x}$ weder ein Maximum noch ein Minimum seyn würde, wenn nicht $\delta V = 0$ wäre. — Ist dagegen für gewisse Werthe von y, z, ꝛc., welche V gegen $V_{x}$ zu einem Maximum oder Minimum machen, $\delta V$ selbst schon von der Form $\frac{1}{0}$, so können die Werthe für dieses Maximum oder Minimum, natürlich nur aus dieser Gleichung

II. $$\delta V = \frac{1}{0}$$

gefunden werden.

Anmerkg. Es ist dieses alles aber bloß die Wiederholung des (§. 148. d. IV. Th. d. S.), und der Gang selbst genau derselbe, wie solcher schon, ausführlicher noch, aber in einer Aufgabe von weniger Allgemeinheit, in den (§. §. 138. 139. d. IV. Th. d. S.) verfolgt worden ist. — Die jetzige Aufgabe enthält aber auch jene des (§. 138.) in sich, in dem besondern Falle wo V eine bloße Funktion von x ist, und $V_{x}$ bloß $V_{x+x}$ vorstellt.

## §. 475. Zusatz.

Das Praktische des Geschäfts, durch welches die Fälle gesucht werden, in welchen V gegen das bestimmt gegebene $V_{x}$ ($x$ einmal positiv und das andere Mal negativ, jedesmal aber im Moment des Verschwindens gedacht) ein Maximum oder Minimum werden soll, besteht also darin, erstens, alle die Werthe zu suchen, welche

I. $$\delta V = 0$$

machen, und dann nachzusehen, ob für dieselben Werthe $\delta^2 V$ positiv oder negativ (d. h. V selbst ein Minimum oder Maximum) wird. Wird auch noch $\delta^2 V = 0$, so muß man sehen, ob auch $\delta^3 V = 0$ wird, und im letztern Falle entscheidet $\delta^4 V$, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist; u. s. w. f.

Allgemein: machen die Werthe, für welche $\delta V = 0$ wird, alle Variations-Koeffizienten bis zu $\delta^n V$ exclusive ebenfalls der

Null gleich, so ist V gegen $V_x$ ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$, wenn n eine gerade Zahl, und $\delta^n V$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist; dagegen findet für diese Werthe weder ein Maximum statt, noch ein Minimum, so oft n eine ungerade Zahl ist. — Sollte aber dasselbe $\delta^n V$ die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, so müßte man die Differenz $V_x - V$ direkt in eine Reihe verwandeln, welche nach (gebrochenen) und steigenden Potenzen von $x$ fortläuft, und daraus, ob das erste Glied dieser Reihe, bei dem Uebergang von einem positiven Werthe von $x$ zu einem negativen Werthe desselben, immerfort $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ bleibt, folgern, daß V nun ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ sey, daß aber weder ein Maximum noch ein Minimum statt finde, wenn dieses Glied mit $x$ zugleich sein (+ oder —) Zeichen wechselt.

Hat man aber dieses Geschäft beendigt, so muß man auch noch, um kein vorhandenes Maximum oder Minimum zu übergehen, alle Werthe suchen, welche

II. $$\delta V = \frac{1}{0}$$

machen, und für diese Werthe direkt nachsuchen, ob $V_x - V$, auch wenn $x$ sein (+ oder —) Zeichen ändert, immerfort ein und dasselbe (+ oder —) Zeichen behält (so daß also ein Maximum oder Minimum vorhanden ist, je nachdem nämlich $V_x - V$ immer negativ oder immer positiv bleibt), oder nicht, in welchem letztern Falle für diese Werthe der Elemente y, z, ꝛc. ꝛc. kein Maximum und auch kein Minimum statt findet.

## §. 476. Zusatz.

Weil aber die Auffindung von $\delta^2 V$ oft mühsam ist, und die Untersuchung, ob solches $\delta^2 V$, für die Werthe der Elemente, welche $\delta V = 0$ machen, positiv oder negativ wird, oft ein noch viel mühsameres Geschäft werden kann, so muß man in einzelnen Fällen der Praxis lieber $V_x - V$ direkt ansehen, und durch, oft

nur der speziellen Frage eigenthümliche Betrachtungen zu der Ueberzeugung sich hinzuarbeiten streben, daß $V_x - V$ für die in Rede stehenden Werthe, welche $\delta V = 0$, oder $= \frac{1}{0}$ machen, bei dem Uebergange des $x$ vom Positiven zum Negativen, immerfort positiv oder immerfort negativ bleibe.

Es wird aber der Koeffizient $\delta^n V$ von $\frac{x^n}{n!}$ in der durch $V_x$ vorgestellten Reihe gefunden, wenn man die Funktion $V_x$ von $x$, n mal hinter einander nach allem $x$ differenziirt, und zuletzt Null statt $x$ schreibt, wie solches der Maclaurin'sche Lehrsatz lehrt. Also wird $\delta V$ gefunden, wenn man in $\partial(V_x)_x$ Null statt $x$ schreibt. Bezeichnet man nun diese Funktion

$$\partial(V_x)_x \quad \text{durch} \quad (\delta V)_x,$$

so ist dieses $(\delta V)_x$ offenbar wieder in eine nach Potenzen von $x$ fortlaufende Reihe zu verwandeln, deren erstes Glied $\delta V$ ist, so daß man

$$1) \quad (\delta V)_x - \delta V = \delta(\delta V) \cdot x + \delta^2(\delta V) \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

hat, während in dieser Reihe zur Rechten der Koeffizient $\delta^n(\delta V)$ von $\frac{x^n}{n!}$ abermals gefunden wird, wenn man $(\delta V)_x$ d. h. $\partial(V_x)_x$ n mal hinter einander nach $x$ differenziirt, d. h. wenn man $\partial^{n+1}(V_x)_x$ nimmt, und zuletzt Null statt $x$ schreibt. Folglich ist

$$2) \quad \delta^n(\delta V) = \delta^{n+1} V,$$

weil $\delta^{n+1} V$ ganz auf dieselbe Weise gefunden wird. Dann läßt sich die Gleichung (1.) auch so schreiben:

$$2) \quad (\delta V)_x - \delta V = \delta^2 V \cdot x + \delta^3 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^4 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

so daß man aus dieser Gleichung findet

$$3) \quad \delta^2 V = \frac{(\delta V)_x - \delta V}{x} - \delta^3 V \cdot \frac{x}{2!} - \delta^4 V \cdot \frac{x^2}{3!} - \cdots.$$

Dieser Gleichung (3.) zu Folge ist also

$\delta^2 V$ mit $\frac{(\delta V)_\varkappa - \delta V}{\varkappa}$ d. h. mit $\frac{\partial(V_\varkappa)_\varkappa - \delta V}{\varkappa}$

zugleich positiv oder zugleich negativ, sobald nur $\varkappa$ im Moment des Verschwindens gedacht wird.

Hat man daher die Elemente im Auge, welche $\delta V$ der Null gleich machen, so fällt aus dem letztern Ausdruck der Subtrahend im Zähler von selbst weg, und es wird

$$\delta^2 V \quad \text{mit} \quad \frac{\partial(\ \varkappa)_\varkappa}{\varkappa}$$

zugleich positiv oder zugleich negativ. Weil jedoch $\frac{\partial(V_\varkappa)_\varkappa}{\varkappa}$ allemal positiv ist, wenn $\partial(V_\varkappa)_\varkappa$ mit $\varkappa$ zugleich vom Positiven zum Negativen übergeht, und da $\frac{\partial(V_\varkappa)_\varkappa}{\varkappa}$ allemal negativ ist, wenn $\partial(V_\varkappa)_\varkappa$ in demselben Momente vom Negativen zum Positiven übergeht, in welchem $\varkappa$ umgekehrt den Uebergang vom Positiven zum Negativen macht, so hat man daran in vorkommenden Einzelfällen ebenfalls oft ein Kennzeichen, um schneller von dem wirklichen Daseyn oder Nichtdaseyn eines Maximi oder Minimi sich überzeugen, und im erstern Falle auch das Maximum vom Minimo unterscheiden zu können.

Anmerkg. In dem einfachsten Falle der (§. §. 138. 139. d. IV. Th. d. S.), wo V bloß eine Funktion von x allein, und wo $V_\varkappa$ bloß $V_{x+\varkappa}$ ist, wo man daher $\delta V = \partial V_x$ hat, wird also, sobald $x = a$ der Werth ist, welcher $\partial V_x = 0$ macht, der Ausdruck $[\partial V_x]_{a+\varkappa}$ mit $\varkappa$ zugleich vom Positiven zum Negativen übergehen müssen, wenn $x = a$ die Funktion V zu einem Minimo machen soll; während V für $x = a$ ein Maximum werden wird, wenn $[\partial V_x]_{a+\varkappa}$ vom Negativen zum Positiven übergeht, so oft $\varkappa$ selbst umgekehrt vom Positiven zum Negativen springt. Ist dagegen $[\partial V_x]_{a+\varkappa}$ für jedes im Moment des Verschwindens befindliche $\varkappa$ immerfort positiv oder immerfort negativ (also, weil $[\partial V_x]_a = 0$ ist, dieser Werth $[\partial V_x]_a$, gegen die nächsten Werthe $[\partial V_x]_{a+\varkappa}$ gehalten, selber

ein Minimum oder ein Maximum), so kann zwar noch immer für diesen Werth $x = a$ die Funktion $V_x$ gegen ihre nächsten Werthe $V_{x+\varkappa}$ ein Maximum oder Minimum seyn, aber auch nicht, so daß man nun zu dem Verfahren des (§. 475.), d. h. zu dem Verfahren (der §. §. 138. 139. d. IV. Th. d. S.) zurückkehren muß, um eine gewünschte Entscheidung zu erlangen.

## §. 477. Zusatz.

Das Schwierigste in der praktischen Durchführung der Aufgabe des (§. 474.) ist gewöhnlich die weitere Behandlung der Gleichung $\delta V = 0$ (wenn wir $\delta V = \frac{1}{0}$, wie solches hier geschehen mag, nicht näher betrachten wollen). Theils um die Schwierigkeiten zu zeigen, theils um sie heben zu lehren, mögen daher noch folgende Fälle näher betrachtet werden.

I. Ist V bloß eine Funktion von x allein, und ist $V_\varkappa$ nichts anders als $V_{x+\varkappa}$, so wird

$$\delta V = \partial V_x \cdot \delta x = \partial V_x,$$

weil jetzt $\delta x = 1$, $\delta^2 x = \delta^3 x = \text{ꝛc. ꝛc.} = 0$ vorausgesetzt sich findet; *) also geht jetzt $\delta V = 0$ in $\partial V_x = 0$ über, und dies ist die spezielle Aufgabe des (§. 140. d. IV. Th. d. S.), welche die vielen dort beigegebenen Beispiele in sich enthält.

II. Ist V eine Funktion von x und y, und $V_\varkappa$ das, was aus V hervorgeht, wenn

---

*) Es ist hier durchgehends die Bezeichnung des (11ten Kap. d. V. Th. d. S.) vorausgesetzt. Nach dieser Bezeichnung wird jeder geänderte (variirte) Werth von x durch $x_\varkappa$ d. h. durch

$$x + \varkappa \cdot \delta x + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 x + \cdots$$

bezeichnet. Ist derselbe nachgehends etwa bloß $= x + z$, so hat man aus der Vergleichung des durch die allgemeine Bezeichnung ausgedrückten und des wirklichen Werthes, die jedesmaligen Werthe von $\delta x$, $\delta^2 x$, $\delta^3 x$, ꝛc. ꝛc.; also für den gegenwärtigen Fall die oben gegebenen Werthe.

$$\text{statt } x \text{ jetzt } x_\varkappa \text{ d. h. } x + \varkappa\cdot\delta x + \frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2 x + \cdots$$

$$\text{und statt } y \text{ jetzt } y_\varkappa \text{ d. h. } y + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2 y + \cdots$$

gesetzt werden, so ist jetzt nach Anleitung des (11ten Kap. d. V. Th. d. S.)

$$\delta V = \partial V_x\cdot\delta x + \partial V_y\cdot\delta y.$$

Werden nun $x$ und $y$, also auch $x_\varkappa$ und $y_\varkappa$, mithin auch $\delta x$ und $\delta y$ von einander als ganz unabhängig gedacht, so zerfällt die Gleichung $\delta V = 0$ in die beiden Gleichungen

$$\partial V_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial V_y = 0;$$

und dies ist die Aufgabe des (§. 145. d. IV. Th. d. S.). Was aber daselbst in der Anmerkung zu (§. 146.) gesagt ist, müßte jetzt, bei unsrer systematischern Bezeichnung (des 11ten Kap. d. V. Th. d. S.), wie hier folgt, gegeben werden.

Sind nämlich $x$ und $y$ nicht von einander unabhängig, sondern ist noch eine Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ gegeben, welche zwischen allen zusammengehörigen Werthen von $x$ und $y$ statt finden soll, also auch wenn $x_\varkappa$, $y_\varkappa$ beziehlich statt $x$ und $y$ gesetzt werden, so hat man noch

$$\varphi_{x_\varkappa, y_\varkappa} \text{ d. h. } \varphi_\varkappa \text{ d. h. } \varphi + \varkappa\cdot\delta\varphi + \frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\partial^2\varphi + \cdots$$

ebenfalls der Null gleich für jedes $\varkappa$, also auch $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, ꝛc. ꝛc. ꝛc., während

$$\delta\varphi = \partial\varphi_x\cdot\delta x + \partial\varphi_y\cdot\delta y$$

ist; alles nach der (im 11ten Kap. d. V. Th. d. S.) mitgetheilten und hier immer gebrauchten Bezeichnungsweise. — Aus den Gleichungen

$$\delta V = 0 \quad \text{und} \quad \delta\varphi = 0$$

folgt aber, wenn $\delta y$ eliminirt wird,

$$\left(\partial V_x - \partial V_y\cdot\frac{\partial\varphi_x}{\partial\varphi_y}\right)\cdot\delta x = 0 \quad \text{oder} \quad \partial V_x - \partial V_y\cdot\frac{\partial\varphi_x}{\partial\varphi_y} = 0;$$

und diese Gleichung, in Verbindung mit $\varphi_{x,y} = 0$, giebt nun die zusammengehörigen Werthe von x und y, welche der $\delta V = 0$ in deren jetziger Bedeutung genügen; und zwar bekommt man jetzt hier genau dasselbe Resultat, was am angeführten Orte gefunden worden ist. *)

Uebrigens konnte auch $\varphi_{x,y'}$ ohne $= 0$ zu seyn, für je zwei zusammengehörige Werthe von x und y konstant bleiben sollen, so daß

$$\varphi_{x_\varkappa, y_\varkappa} = \varphi_{x,y'}$$

also wiederum

$$\varphi_\varkappa - \varphi \quad \text{d. h.} \quad \varkappa \cdot \delta\varphi + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2\varphi + \cdots = 0$$

ist, für jedes $\varkappa$. Dann hängen aber $\delta x$ und $\delta y$ wiederum so von einander ab, daß $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, ꝛc. ꝛc. wird, wie zunächst vorher. Die Zerfällung der Gleichung $\delta V = 0$ bleibt daher nun genau dieselbe, wie zunächst vorher.

III. Ist V eine Funktion von x, y und $\partial y_x$, welche letztere Ableitung durch $y_1$ bezeichnet seyn mag, und entsteht $V_\varkappa$ dadurch, daß man

bloß statt y setzt $y_\varkappa$ oder $y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots$,

aber dann auch

statt $\partial y_x$ oder $y_1$ setzen muß $\partial(y_\varkappa)_x$ oder

$$\partial y_x + \varkappa \cdot \partial\delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \partial^2 \delta y + \cdots,$$

wo alle bloßen $\partial$ sich auf x beziehen, so hat man nach dem (11ten Kap. d. V. Th. d. S.), besonders aber nach (§. 244.) daselbst,

1) $$\delta V = \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \partial\delta y.$$ **)

---

*) Dies erkennt man sogleich, weil das dortige $\partial y_x$ aus der Gleichung

$$\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y_x = 0$$

gefunden wird, und weil das dortige F das hiesige V ist.

**) Dem Geiste der Bezeichnung und Behandlung in dem (11ten

Soll also die Gleichung $\delta V = 0$ für jede beliebige Funktion von x gelten, welche statt $\delta y$ gesetzt werden mag, so zerfällt sie jetzt nach (§. 328. d. VI. Th. d. S.) in die beiden Gleichungen

2) $\partial V_y = 0$ und 3) $\partial V_{y_1} = 0$.

B. Aendert man aber die Aufgabe; denkt man sich $\delta y$ für jeden andern bestimmten Werth von x anders, und immer so, daß für diesen bestimmten Werth von x

$$\delta y = 0, \text{ aber nicht } \partial\delta y = 0$$

wird, so reduzirt sich die Gleichung $\delta V = 0$ jetzt bloß auf

4) $\partial V_{y_1} \cdot \partial\delta y = 0$ d. h. auf $\partial V_{y_1} = 0$,

welche zur Bestimmung von y (in x ausgedrückt) dient.

C. Und dächte man sich die Aufgabe noch einmal anders und so, daß für jeden bestimmten Werth von x

$$\delta y \text{ nicht } = 0, \text{ aber } \partial\delta y = 0$$

---

Kap. d. V. Th. d. S.) zufolge, bezeichnet man die, obgleich gegegebene, Reihe

1) $$\partial y_x + x \cdot \partial\delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \partial\delta^2 y + \cdots,$$

welche statt $y_1$ gesetzt werden muß, um $V_x$ aus V zu erhalten, abermals nach demselben Schema durch $(y_1)_x$ d. h. durch

2) $$y_1 + x \cdot \delta y_1 + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y_1 + \cdots,$$

so daß $\delta y_1$, $\delta^2 y_1$, ꝛc. ꝛc. wiederum bloß bezeichnete Koeffizienten sind, welche jedoch, da die Reihe (2.) von der Reihe (1.) nicht verschieden seyn soll, in der Reihe (1.) bereits in die Koeffizienten

$$\delta y, \delta^2 y, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

ausgedrückt gefunden sind, so daß man

$$\delta y_1 = \partial\delta y, \quad \delta^2 y_1 = \partial\delta^2 y, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

hat. Da nun V als Funktion von y und $y_1$, welche beziehlich in $y_x$ und $(y_1)_x$ übergehen, betrachtet werden muß, so hat man

$$\delta V = \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \delta y_1;$$

und so findet sich der obige Ausdruck für $\delta V$.

werden müßte, so reduzirte sich dasmal die Gleichung $\delta V = 0$ bloß auf

$$5) \quad \partial V_y \cdot \delta y = 0 \quad \text{d. h. auf} \quad \partial V_y = 0.$$

Ehe der Anfänger hier weiter fortgeht, lese derselbe zuvor die hieher gehörigen Beispiele im zweiten Anhange (Aufgabe 1—4.).

IV. Ferner kann V eine Funktion von

$$x,\ y,\ \partial y_x,\ [y_x]_a,\ [\partial y_x]_a,\ [y_x]_b,\ [\partial y_x]_b,\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

seyn. *) — Bezeichnet man aber

$$\partial y_x,\ [y_x]_a,\ [y_x]_b,\ [\partial y_x]_a,\ [\partial y_x]_b,$$

beziehlich durch

$$y_1,\quad y',\quad y'',\quad y'_1,\quad y''_1,$$

so daß V eine Funktion von $x$, $y$, $y_1$, $y'$, $y''$, $y'_1$ und $y''_1$ ist, so hat man, wenn $V_z$ aus V dadurch hervorgehen soll, daß bloß $y$ in $y_z$ übergeht, weil dann $\partial y_x$ in $\partial(y_z)_x$, aber auch $[y_x]_a$ in $[(y_z)_x]_a$, u. s. w. f. übergehen wird, nach (§. §. 253. u. 244. des V. Th. d. S.):

$$\delta V = \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \partial\delta y + \partial V_{y'} \cdot [(\delta y)_x]_a + \partial V_{y''} \cdot [(\delta y)_x]_b + \partial V_{y'_1} \cdot [(\partial\delta y)_x]_a + \partial V_{y''_1} \cdot [(\partial\delta y)_x]_b. \text{ **)}$$

Ist nun vermöge der Bedingung der Aufgabe $\delta y$ ganz

---

*) Nach (§. 204. d. V. Th. d. S.) bedeuten

$$[y_x]_a,\ [\partial y_x]_a,\ [(\delta y)_x]_a,\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

das, was aus den Funktionen $y_x$, $\partial y_x$, $\delta y$, ꝛc. ꝛc. wird, wenn man überall a statt x setzt.

**) In der Folge werden wir, um dem Setzer weniger Mühe zu machen, immer bloß

$$y_a,\quad \delta y_a,\quad \partial\delta y_a,\quad \text{u. s. w.}$$

beziehlich statt

$$[y_x]_a,\ [(\delta y)_x]_a,\ [\partial(\delta y)_x]_a,\ \text{u. s. w.}$$

schreiben. Ist dies einmal festgesetzt und angenommen, so kann die Bedeutung dieser abgekürzt geschriebenen Ausdrücke nicht verkannt und verwechselt werden.

willkührlich, so zerfällt dasmal $\delta V = 0$ nach der Anmerkg zu (§. 330. d. VI. Th. d. S.) in die 6 einzelnen Gleichungen:

1) $\partial V_y = 0$, 2) $\partial V_{y_1} = 0$, 3) $\partial V_{y'} = 0$,
4) $\partial V_{y''} = 0$, 5) $\partial V_{y'_1} = 0$ und 6) $\partial V_{y''_1} = 0$,

aus denen dann die 4 unbekannten Konstanten $y'$, $y''$, $y'_1$, $y''_1$ eliminirt werden können, so daß wieder, wie in (III. zu Anfang), zwei Gleichungen zwischen x, y und $\partial y_x$ hervorgehen. Eliminirt man nachgehends aus diesen beiden letztern Gleichungen die Ableitung $\partial y_x$, so erhält man y in x ausgedrückt, muß jedoch diese für y gefundene Funktion noch prüfen, einmal, ob sie den beiden letztern Gleichungen, und dann auch, ob sie überhaupt den 6 Gleichungen (1—6.) genügt, weil nur in diesem Falle den unerläßlichen Bedingungen der Aufgabe genügt ist.

Welche Menge von Abänderungen aber die Aufgabe noch erleiden könne, analog den in (III.) angedeuteten, läßt sich leicht denken. Es läßt sich aber auch jedesmal leicht erkennen, nach welchen Regeln die Gleichung $\delta V = 0$ in jedem besonderen Falle behandelt werden müsse. Alles hängt nämlich davon ab, aus $\delta V = 0$ alle diejenigen von $\delta y$ abhängigen Ausdrücke zu eliminiren, welche von den übrigen derselben vermöge der einzelnen Bedingungen einer jeden einzelnen Aufgabe noch abhängig sind; dann aber die Koeffizienten der übrig bleibenden, mit ganz unabhängigen Faktoren versehenen, Glieder einzeln der Null gleich zu setzen.

Man lese nun vor Allem die hieher gehörigen Beispiele im zweiten Anhange Aufg. (5. u. 6.). Alle diese Beispiele im zweiten Anhange Aufg. (1—6.) können noch mannigfaltig abgeändert werden. Ferner kann in den Fällen, in denen $\delta V = 0$ noch besonders behandelt werden soll, und welche wir im gegenwärtigen (§. 477.) aufzuzählen angefangen haben, die Funktion V auch noch die Ableitungen

$$\partial^2 y_x, \quad \partial^3 y_x, \quad \text{ꝛc. ꝛc.},$$

ferner noch den Veränderlichen z und dessen Ableitungen

$$\partial z_x, \quad \partial^2 z_x, \quad \text{ꝛc. ꝛc.};$$

ferner noch mehr Veränderliche mit ihren Ableitungen, endlich aber auch Ausdrücke, wie

$[y_x]_a$, $[z_x]_a$, $[\partial^a y_x]_a$, $[\partial^a z_x]_a$, $[\partial^a y_x]_b$, $[\partial^a z_x]_b$, u. s. w. f enthalten. — Wir glauben daher diese hier im (§. 477.) begonnene Vereinzelung der allgemeinsten Aufgabe des (§. 474.) nur noch für die Fälle statt finden lassen zu dürfen, in welchen die Funktion V auch angezeigte Integrale in sich aufnimmt, oder (und dieser Fall gehört zu den einfachsten in dieser Gattung) in welchem die Funktion V bloß ein angezeigtes Integral selbst ist.

V. Ist

$$1) \qquad V = \int_{b \div a} U \cdot dx,$$

dagegen U selbst eine der in (II.—IV.) unter V gedachten Funktionen; sind ferner die Nachbarwerthe $V_\varkappa$, gegen welche V ein Maximum oder Minimum werden soll, folgende:

$$2) \qquad V_\varkappa = \int_{b \div a} U_\varkappa \cdot dx,$$

wo $U_\varkappa$ das bedeutet, was aus U hervorgeht, wenn statt der Elemente y, z, ꝛc. jetzt die mit denselben Elementen anfangenden Reihen $y + \varkappa \cdot \delta y + \cdots$, $z + \varkappa \cdot \delta z + \cdots$ gesetzt werden, so wird man

$$3) \qquad \delta V = \int_{b \div a} \delta U \cdot dx$$

so finden, wie etwa in dem Beispiel zu (§. 263. d. V. Th. d. S.) zu sehen ist. — Ist nämlich U z. B. eine Funktion etwa von $x, y, y_1, y_2, z, z_1$, wo $y_1, y_2, z_1$ beziehlich die Ableitungen $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, $\partial z_x$ vorstellen, so hat man

$$\delta V = \int_{b \div a} \left\{ \begin{matrix} \partial U_y \cdot \delta y + \partial U_{y_1} \cdot \partial \delta y + \partial U_{y_2} \cdot \partial^2 \delta y \\ + \partial U_z \cdot \delta z + \partial U_{z_1} \cdot \partial \delta z \end{matrix} \right\} \cdot dx.$$

Um aber die Behandlung der Gleichung $\delta V = 0$ nachgehends gehörig weiter verfolgen zu können, wird es hier zur unerläßlichen Bedingung, daß man den für $\delta V$ direkt gefundenen Ausdruck umforme, und zwar so, wie zu Ende des hier so eben angeführten Beispiels (zu §. 263. d. V. Th. d. S.) zu sehen ist, so nämlich, daß die willkührlichen Funktionen $\delta y$, $\delta z$, ꝛc. allein noch unter dem Integralzeichen vorkommen, dagegen alle ihre Ableitungen $\partial \delta y$, $\partial^2 \delta y$, ꝛc., $\partial \delta z$, $\partial^2 \delta z$, ꝛc. bereits von dem Integralzeichen befreit erscheinen.

Diese Umformung ist allemal möglich, weil man $\delta V$ findet, wenn man jedes Glied unter dem Integralzeichen einzeln integrirt. Gesetzt nun, ein Glied von $\delta V$ hätte die Form

1) $$\int_{b\div a} \partial U_{z_3} \cdot \partial^3 \delta z \cdot dx,$$

so hätte man nach (§. 174. d. IV. Th. d. S.) d. h. nach der Formel $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, welche vollständiger so aussieht:

2) $$\int_{b\div a} (u \cdot \partial v) \cdot dx = [(u \cdot v)_x]_{b\div a} - \int_{b\div a} (v \cdot \partial u_x) \cdot dx,$$

sogleich

3) $$\int_{b\div a} \partial U_{z_3} \cdot \partial^3 \delta z \cdot dx = [\partial U_{z_3} \cdot \partial^2 \delta z]_{b\div a} - \int_{b\div a} \partial(\partial U_{z_3}) \cdot \partial^2 \delta z \cdot dx.$$

Dieses letztere Integral zur Rechten wird aber nach derselben Formel (2.) wiederum zerlegt, so daß man hat

4) $$\int_{b\div a} \partial(\partial U_{z_3}) \cdot \partial^2 \delta z \cdot dx =$$
$$[\partial(\partial U_{z_3}) \cdot \partial \delta z]_{b\div a} - \int_{b\div a} \partial^2(\partial U_{z_3}) \cdot \partial \delta z \cdot dx.$$

Auch hier kann das Integral zur Rechten auf's neue nach derselben Formel (2.) zerlegt werden, so daß man abermals hat

5) $$\int_{b\div a} \partial^2(\partial U_{z_3}) \cdot \partial \delta z \cdot dx =$$
$$[\partial^2(\partial U_{z_3}) \cdot \delta z]_{b\div a} - \int_{b\div a} \partial^3(\partial U_{z_3}) \cdot \delta z \cdot dx.$$

Substituirt man aber diesen Werth aus (4.) in (3.), und dann hierin wieder den Werth aus (5.), so erhält man zuletzt

6) $$\int_{b\div a} \partial U_{z_3} \cdot \partial^3 \delta z \cdot dx = [\partial U_{z_3} \cdot \partial^2 \delta z]_{b\div a} - [\partial(\partial U_{z_3}) \cdot \partial \delta z]_{b\div a}$$
$$+ [\partial^2(\partial U_{z_3}) \cdot \delta z]_{b\div a} - \int_{b\div a} \partial^3(\partial U_{z_3}) \cdot \delta z \cdot dx,$$

in welchem Ausdruck zur Rechten keine Ableitung von $\delta z$ mehr unter dem Integralzeichen erscheint.

So wie aber dieser eine Theil von $\delta V$ umgeformt wurde, eben so muß und kann man jeden der übrigen Theile von $\delta V$ umformen, so daß zuletzt für ganz $\delta V$ die hier verlangte Form erscheint. *)

---

*) Das Resultat in (6.) erhält man übrigens unmittelbar, wenn man die bereits erweiterten Formeln (§. §. 225—228. d. V. Th. d. S.) in Anwendung bringt.

Es ist aber diese letztgedachte Umformung des $\delta V$ hier deshalb so nothwendig und unerläßlich, weil nur, wenn $\delta V$ gerade diese hier verlangte Form hat, die Gleichung $\delta V = 0$ sogleich und unmittelbar nach den (§§. 334—337. d. VI. Th. d. S.) weiter zerlegt werden kann, so daß man alle die einzelnen Gleichungen erhält, welche in der Gleichung $\delta V = 0$ stecken.

Unter diesen einzelnen Gleichungen, in welche $\delta V = 0$ nach den (§§. 334.—337. d. VI. Th. d. S.) zerfällt, ist dann immer eine, oder sind immer einige, welche zwischen den Veränderlichen und ihren Ableitungen statt finden; und diese werden die allgemeinen Gleichungen für das Maximum oder Minimum genannt. — Die übrigen der aus $\delta V = 0$ hervorgehenden Gleichungen finden aber allemal zwischen den besondern Ziffern-Werthen der Veränderlichen statt, welche sie für $x = a$ und $x = b$ annehmen, während a und b die Grenzen des Integrals sind; diese letztern Gleichungen werden daher die Grenzgleichungen für das Maximum oder Minimum genannt. — Die allgemeinen Gleichungen für das Maximum oder Minimum sind also allemal Differenzialgleichungen, müssen deshalb integrirt werden, und führen dadurch willkührliche Konstanten ein. Die Grenzgleichungen und die übrigen Nebenbedingungen der Aufgabe bestimmen dann in der Regel noch diese Konstanten.

Der Anfänger lese nun zunächst die Aufgaben (7. und 8.) im zweiten Anhange und gehe dann erst hier zur nächsten Nummer weiter. Auch gehören hieher die Aufgaben (21—23.).

VI. Ist jedoch U eine solche Funktion, wie sie so eben in (V.) gedacht worden ist, und ist wiederum

$$1) \qquad V = \int_{b \div a} U \cdot dx;$$

sind dagegen jetzt die Nachbarwerthe $V_x$, in Bezug auf welche die Funktion V ein Maximum oder ein Minimum werden soll, noch umfassender, ist nämlich

$$2) \qquad V_x = \int_{b_x \div a_x} U_x \cdot dx,$$

wo $b_x$, $a_x$, nach Potenzen von $x$ fortlaufende Reihen vorstellen, deren erste Glieder beziehlich b und a selbst sind, und welche

der Bezeichnung des (V. Th. d. S. Kap. 11.) zu Folge allemal beziehlich durch

$$b + x \cdot \delta b + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 b + \cdots$$

und $$a + x \cdot \delta a + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 a + \cdots$$

vorgestellt werden, so wird jetzt

$$3)\quad \delta V = \int_{b \div a} \delta U \cdot dx + \partial\left(\int_{b \div a} U \cdot dx\right)_b \cdot \delta b + \partial\left(\int_{b \div a} U \cdot dx\right)_a \cdot \delta a. \quad *)$$

Weil aber (nach §. 205. d. V. Th. d. S.) es einerlei ist, ob man eine Funktion U von x zuerst nach x integrirt und dann b statt x setzt, oder ob man sogleich b statt x setzt, und dann nach b integrirt, sobald nur $U_x$ dieses b selbst noch nicht enthält, so hat man wiederum

$$\partial\left(\int_{b \div a} U_x \cdot dx\right)_b = \partial\left(\int_{b \div a} U_b \cdot db\right)_b = U_{b'}$$

wenn unter $U_b$ das verstanden wird, was aus $U_x$ wird, sobald man b statt x schreibt. Und weil noch überdieß nach (Anmerkg. zu §. 159. d. IV. Th. d. S.)

$$\int_{b \div a} U_x \cdot dx = -\int_{a \div b} U_x \cdot dx,$$

so wie noch

$$\partial\left(\int_{a \div b} U_x \cdot dx\right)_a = \partial\left(\int_{a \div b} U_a \cdot da\right)_a = U'_a$$

ist, so folgt wiederum aus (3.)

$$4)\quad \delta V = \int_{b \div a} \delta U \cdot dx + U_b \cdot \delta b - U_a \cdot \delta a,$$

wo auch unter $U_a$ das zu verstehen ist, was aus U als Funktion von x wird, sobald man überall a statt x schreibt. **)

---

*) Es wird nämlich $\delta V$ gefunden, wenn man $V_\varkappa$ nach allem $\varkappa$ differenziirt und dann Null statt $\varkappa$ schreibt. Der erste dieser 3 Theile von $\delta V$ entsteht aber, wenn man nach dem $\varkappa$ differenziirt, was in $U_\varkappa$ steckt; und die beiden andern Theile von demselben für $\delta V$ in (3.) gefundenen Ausdruck entstehen, wenn man nach dem $\varkappa$ differenziirt, was in $b_\varkappa$ steckt, und auch nach dem $\varkappa$, was in $a_\varkappa$ enthalten ist.

**) Wollte man statt der Gleichung (4.) schreiben

Die jetzige Gleichung $\delta V = 0$ bekommt also, gegen die vorige in (V.), noch die beiden Grenzglieder $U_b \cdot \delta b - U_a \cdot \delta a$ mehr, führt daher zu denselben allgemeinen Gleichungen für das Maximum und Minimum, also auch zu denselben Integralen, wie in (V.); und nur die Grenzgleichungen werden etwas verschieden ausfallen, so daß nun die eingehenden Konstanten eine von der vorigen etwas verschiedene Bestimmung erhalten werden.

Man lese nun im zweiten Anhange die Aufgaben (9—20.); dann erst gehe man weiter zu der nun folgenden Nummer.

VII. Enthält die Funktion U wiederum x, y und z und die Ableitungen von y und z nach x bis zu einer beliebigen Ordnung hin; ist wiederum wie in (V.)

1) $V = \int_{b \div a} U \cdot dx$ und 2) $V_\varkappa = \int_{b \div a} U_\varkappa \cdot dx$;

sind aber y und z von einander abhängig durch eine Differenzialgleichung

3) $L_{x,y,z,y_1,z_1,y_2,z_2,\,\text{&c.}\,\text{&c.}} = 0$,

wo die Ableitungen $\partial^a y_x$, $\partial^a z_x$ beziehlich durch $y_a$ und $z_a$ vorgestellt sind, so hat man zunächst

4) $\delta V = \int_{b \div a} (\partial U_y \cdot \delta y + \partial U_z \cdot \delta z + \partial U_{y_1} \cdot \partial \delta y + \partial U_{z_1} \cdot \partial \delta z + \cdots) \cdot dx$

oder (nach §. §. 225—228. d. V. Th. d. S. umgeformt)

$$\text{I. } \delta V = \int_{b \div a} (\partial U_y - \partial(\partial U_{y_1}) + \cdots) \cdot \delta y + \int_{b \div a} (\partial U_z - \partial(\partial U_{z_1}) + \cdots) \cdot \delta z + \left\{ \begin{array}{c} \text{die übrigen vom Integralzeichen bereits} \\ \text{befreiten Glieder.} \end{array} \right\}.$$

---

5) $$\delta V = \int_{b \div a} \delta U \cdot dx + [U_x \cdot \delta x]_{b \div a},$$

so wäre dies nur dann erlaubt (da $\delta x$ an sich gar keinen Sinn hat, in so ferne $\delta x$ in der ganzen Untersuchung gar nicht vorkommt), wenn man durch die Type $[U_x \cdot \delta x]_{b \div a}$ symbolisch ausdrücken wollte, daß zwei von einander subtrahirte Glieder vorhanden sind, von denen das eine erhalten wird, wenn man in $U_x \cdot \delta x$ nicht bloß b statt x, sondern auch $\delta b$ statt $\delta x$ schreibt, also nur typisch überall b statt x setzt; während das andre Glied erhalten wird, wenn man eben so bloß typisch statt x (in $U_x$ und hinter dem $\delta$) überall a setzt.

Weil aber hier wiederum (wie in den Aufgaben 18.—20. im zweiten Anhange) y und z, also auch $\delta y$ und $\delta z$, von einander abhängig sind, so muß man aus der Gleichung $\delta V = 0$, ehe sie weiter nach den (§. §. 334—338. d. VI. Th. d. S.) zerlegt werden kann, zuvor $\delta z$ und was von $\delta z$ abhängt, oder $\delta y$ und was von $\delta y$ abhängt, aus ihr eliminiren.

Weil jedoch aus der Gleichung $L = 0$ zwar nach (§. §. 253. 244. d. V. Th. d. S.) sogleich

$$\delta L = \partial L_y \cdot \delta y + \partial L_z \cdot \delta z + \partial L_{y_1} \cdot \partial \delta y + \partial L_z \cdot \partial \delta z + \cdots = 0$$

hervorgeht, aber nicht erkannt werden kann, wie man aus ihr $\delta z$ in $\delta y$ ausgedrückt erhalten könnte, so wird man sich hier zur Elimination nach Lagrange und Euler der „Methode der Multiplikatoren" bedienen. Diese Methode ist zwar dem Wesen nach diejenige, welche man in der gemeinen Algebra (I. Th. d. S. §. 223) unter dem Namen der französischen Eliminations-Methode beschrieben und angewandt findet, muß aber hier nachstehende Modifikation erleiden, um ihren Zweck zu erreichen.

Man multiplizirt nämlich die gegebene Gleichung

II. $$L = 0$$

mit einer ganz unbestimmt gelassenen Funktion $\lambda$ von x, addirt das Produkt $\lambda \cdot L$ zu U, so daß man erhält, weil $\lambda \cdot L = 0$ ist,

III. $$U = U + \lambda \cdot L,$$

und setzt dann in der Gleichung (I.) für $\delta V$, überall $U + \lambda \cdot L$ statt U *). — Hernach kann man sich $\lambda$ so bestimmt denken, daß

---

*) Dies Verfahren führt genau eben dahin, wohin man auch gelangt, wenn man in der Gleichung

$$\delta V = \int \delta U \cdot dx$$

statt $\delta U$ die Summe $\delta U + \lambda \cdot \delta L$ schreibt. In beiden Fällen bekommt man nämlich immer dieselbe Gleichung

$$\delta V = \int (\delta U + \lambda \cdot \delta L) \cdot dx,$$

weil $\lambda$ als bloße Funktion des unabhängigen Veränderlichen angesehen wird.

der Koeffizient von $\delta y$ unter dem Integralzeichen $= 0$ wird, und man hat also dieses $\delta y$ weggeschafft. — Weil aber die dadurch erhaltene Gleichung

$$\text{IV.} \quad \partial(U+\lambda\cdot L)_y - \partial(\partial(U+\lambda\cdot L)_{y_1}) + \cdots = 0$$

nicht bloß $\lambda$, sondern auch $\partial\lambda_x$, $\partial^2\lambda_x$, ꝛc. enthält, also in Bezug auf $\lambda$ eine Differenzialgleichung irgend einer nten Ordnung ist, so bestimmt die Gleichung (IV.) diese Funktion $\lambda_x$ nur in so weit, daß noch n Konstanten in ihr willkührlich bleiben. Also kann man sich diese Konstanten noch weiter so bestimmt denken, daß auch von den übrigen, außerhalb des Integralzeichens stehenden, Gliedern des Ausdrucks (1.) für $\delta V$, die mit

$$\delta y_a,\ \delta y_b,\ \delta^2 y_a,\ \delta^2 y_b,\ \text{ꝛc.}$$

behafteten, herausfallen (indem man ihre Koeffizienten $= 0$ setzt); also daß dann jener Ausdruck für $\delta V$ in der That weder $\delta y$ noch $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, ꝛc. noch irgend bestimmte Werthe derselben enthält.

Indem nachgehends $\delta V = 0$ weiter zerfällt wird, kann man alle (sowohl die vorigen, als diese neuen) Gleichungen dazu benutzen, die unbekannten Funktionen $y_x$, $z_x$, $\lambda_x$, ꝛc. ꝛc. (allen vorhandenen Bedingungen gemäß) zunächst durch Integration zu bestimmen. Und will man, was gewöhnlich der Fall ist, $\lambda_x$ nicht haben, so kann solches, so wie die davon abhängigen Werthe $\lambda_a$, $\lambda_b$, $\partial\lambda_a$, $\partial\lambda_b$, ꝛc. ꝛc., eliminirt werden, dergestalt, daß man bloß die unbekannten $y_x$ und $z_x$ bestimmt.

Auch ist es leicht, diese Methode auf zusammengesetztere Fälle auszudehnen, wo die Funktion U außer x, y, z noch mehr Veränderliche u, v ꝛc. nebst ihren Ableitungen enthält, und wo zwischen y, z, u, ꝛc. mehrere Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, ꝛc. ꝛc. gegeben sind, und nun

$$U = U+\lambda\cdot L+\mu\cdot M+\cdots$$

genommen wird, um nachgehends $\lambda_x$, $\mu_x$, ꝛc. dem angegebenen Zwecke gemäß noch bestimmen zu können.

Der Anfänger lese nicht nur die (Aufgaben 21. und 22.) im zweiten Anhange, sondern versuche auch die Aufgaben (18—20) daselbst mit-

telst der so eben gelehrten Eliminationsmethode zu behandeln, da sich letztere Methode offenbar auch auf jenen Fall erstreckt, in welchem die Gleichung $L = 0$ keine Differenzial-, sondern eine Ur-Gleichung ist. Die Vergleichung der neuen Resultate und ihre Uebereinstimmung mit den dort erhaltenen wird instruktiver werden, als jede weitere theoretische Behandlung es zu werden vermag.

VIII. Hierher gehört auch der Fall der sogenannten relativen Maxima oder Minima, wo ein Integral-Ausdruck V ein Maximum oder Minimum werden soll, unter allem $V_n$, für welche ein anderer ähnlicher Ausdruck W konstant bleibt, d. h. immer denselben Werth behält.

Der Anfänger lese die (Aufgaben 24 und 25 des zweiten Anhanges) und versuche, sie dann auch nach der in (VII.) beschriebenen Methode zu behandeln. Die Aufgabe (27.) findet man bereits nach derselben Methode behandelt.

IX. Diese Methode der Multiplikatoren der Nummer (VIII.) wird man als Eliminationsmethode auch dann mit besonderem Nutzen anwenden können, wenn die Funktion V, welche das Maximum oder Minimum werden soll, unter einem Integralzeichen noch ein oder mehrere andere Integralzeichen aufgenommen hat. Indem man nämlich jedes einzelne Integral einem neuen Veränderlichen gleich setzt und dann differenziirt, bekommt man eben so viele Differenzialgleichungen $L = 0$, $M = 0$, 2c. 2c., welche dann mit solchen Multiplikatoren $\lambda$, $\mu$, 2c. 2c. versehen werden können, so daß man statt

$$V = \int U \cdot dx, \quad \text{jetzt} \quad V = \int (U + \lambda \cdot L + \mu \cdot M + \cdots) \cdot dx$$

nimmt, übrigens nach (VII.) weiter verfährt.

Der Anfänger lese nun die Aufgabe (28.) des zweiten Anhanges, und gehe dann erst zur folgenden Nummer über.

X. Kommen in $\delta V$ auch doppelte Integrale vor, etwa Integrale nach x und nach y genommen, so muß man diese, analog dem in der Nummer (V.) angegebenen Verfahren, ebenfalls so umformen (durch theilweise Integration nach dem §. 228. d. V. Th. d. S.), daß, wenn z. B. z allein der abhängige Veränderliche wäre, nur $\delta z$, nicht aber dessen Ableitungen

$$\partial(\delta z)_x, \quad \partial(\delta z)_y, \quad 2c. \; 2c.$$

unter dem doppelten Integralzeichen vorkommen, so daß also $\delta V$ auf die Form

$$\delta V = \iint P \cdot \delta z \cdot dx \cdot dy + \left\{ \begin{matrix} \int Q_{(x)} \cdot (\delta z)_x \cdot dx \\ \int R_{(y)} \cdot (\delta z)_y \cdot dy \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \text{die übrigen von je-} \\ \text{dem Integralzei-} \\ \text{chen befreiten} \\ \text{Glieder} \end{matrix} \right\}$$

gebracht wird, wo in $Q_{(x)} \cdot (\delta z)_x$ die y bereits einen bestimmten Werth angenommen haben, während dies in $R_{(y)} \cdot (\delta z)_y$ nicht mit y, sondern mit x der Fall ist. Die Gleichung $\delta V = 0$ zerfällt dann, nach dem Geiste des (XV. Kap. im VI. Th. d. S.) behandelt, in mehrere einzelne, und giebt namentlich

$$\text{I.} \qquad P = 0,$$

welches die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums ist, eine Parzialgleichung, und welche, wenn man sie integrirt, willkührliche Funktionen einführt. Diese letztern werden dann in der Regel bestimmt durch die beiden andern Gleichungen

$$\text{II.} \quad Q_{(x)} = 0 \qquad \text{und} \qquad \text{III.} \quad R_{(y)} = 0,$$

in welche die Gleichung $\delta V = 0$ ebenfalls noch zerfällt. Unbestimmte Konstanten, welche außerdem noch eingehen, in so ferne die Gleichungen (II. und III.) in der Regel totale Differenzialgleichungen seyn, also abermals integrirt werden müssen, werden zuletzt noch durch die übrigen Gleichungen bestimmt, welche noch in $\delta V = 0$ enthalten sind, und welche zwischen besonderen Werthen der Veränderlichen statt finden.

Man lese nun die Aufgabe (29.) des zweiten Anhanges. — Dann erst kehre man zurück zur nächsten Nummer.

XI. Ganz auf ähnliche Weise müßte man verfahren, wenn unter dem doppelten Integralzeichen außer $z_{x,y}$ auch noch $u_{x,y}$, $v_{x,y}$, ꝛc. ꝛc. vorkommen sollten. Enthält nämlich V auffer z auch noch eine ähnliche Funktion $u_{x,y}$, so wird man dem $\delta V$ die Form

$$\iint (P \cdot \delta z + Q \cdot \delta u) \cdot dy \cdot dx + \{\text{die übrigen Glieder}\}$$

geben müssen, um dann, wenn $\delta V = 0$ gesetzt wird, daraus

$$P = 0 \quad \text{und} \quad Q = 0$$

zu erhalten, im Falle nämlich $\delta z$ und $\delta u$ gleich willkührlich und nicht von einander abhängig sind. — Außerdem aber muß erst $\delta u$ eliminirt werden, um

$$\delta V = \iint (P + Q \cdot W) \cdot \delta y \cdot dy \cdot dx + \{\text{die übrigen Glieder}\},$$

und dann aus $\delta V = 0$ auch

$$P + Q \cdot W = 0$$

zu erhalten; u. s. w. f.

Zum Eliminiren selber kann man sich wiederum der Methode der Multiplikatoren, wie solche in (VII.) beschrieben steht, bedienen.

Das Umformen von $\delta V$ aber, wie solches im gegenwärtigen Falle verlangt werden mußte, geschieht allemal durch wiederholte theilweise Integration, bald nach y, bald nach x, und am schnellsten, wenn man die Formel des (§. 228. d. V. Th. d. S.) in Anwendung bringt.

Man lese nun die Aufgabe (30.) des zweiten Anhanges; hernach kehre man zurück zur nächsten Nummer.

XII. Ist die Funktion V, welche ein Maximum oder ein Minimum werden soll, gar nicht direkt, auch nicht verwickelt durch eine Urgleichung, sondern verwickelt durch eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung (nach V) gegeben, z. B. durch die Gleichung

1) $$F_{x, y, y_1, y_2, \cdots V, V_1} = 0,$$

wo $y_1, y_2, \cdots y_n, V_1$ beziehlich die Ableitungen

$$\partial y_x, \partial^2 y_x, \cdots \partial^n y_x, \partial V_{(x)}$$

vorstellen sollen, mit der Bedingung, daß $V_a = 0$, $V_b$ aber das Maximum oder Minimum werden soll; *) so hat man

*) $V_a, V_b$ stehen hier der Kürze wegen statt $[V_{(x)}]_a, [V_{(x)}]_b$ d. h. statt dem, was aus $V_{(x)}$ wird, wenn statt jedes explizit und implizit vorkommenden x, beziehlich a oder b gesetzt wird.

Denkt man sich übrigens den einfachsten Fall dieser Aufgabe, nämlich den Fall, in welchem die gegebene Gleichung auf die Form

$$\varphi_{x, y, y_1, \cdots y_n} - V_1 = 0$$

$$\delta F = 0$$

d. h.

2) $(\partial F_y \cdot \delta y + \partial F_{y_1} \cdot \partial\delta y + \partial F_{y_2} \cdot \partial^2\delta y + \cdots) + \partial F_V \cdot \delta V + \partial F_{V_1} \cdot \partial\delta V = 0.$

Alles kommt nun darauf an, hieraus $\delta V$ zu finden. Zu dem Ende multiplizirt man die Gleichung (2.) mit einer noch völlig unbestimmt gelassenen Funktion $\lambda$, und nimmt dann links und rechts das Integral nach allem x zwischen den Grenzen a und b; und man erhält, wenn der Kürze wegen

3) $\lambda \cdot (\partial F_y \cdot \delta y + \partial F_{y_1} \cdot \partial\delta y + \partial F_{y_2} \cdot \partial^2\delta y + \cdots) = M$

gesetzt wird,

4) $\int_{b\div a} M \cdot dx + \int_{b\div a} [\lambda \cdot \partial F_V - \partial(\lambda \cdot \partial F_{V_1})] \cdot \delta V \cdot dx + [\lambda \cdot \partial F_{V_1} \cdot \delta V]_{b\div a} = 0.$

Denkt man sich nun $\lambda$ so bestimmt, daß

5) $\lambda \cdot \partial F_V - \partial(\lambda \cdot \partial F_{V_1}) = 0$

wird, so hat man aus (4.), weil $\delta V_a = 0$ vorausgesetzt worden ist (in so ferne $V_a$ konstant bleiben soll),

6) $$\delta V_b = \frac{-\int_{b\div a} \cdot M \cdot dx}{[\lambda \cdot \partial F_{V_1}]_b},$$

wo in dem Nenner überall b statt x gesetzt worden ist. Dieser Ausdruck, wenn er $= 0$ gesetzt wird, giebt die Bedingung, welche zunächst erfüllt seyn muß, wenn $V_b$ ein Maximum oder Minimum werden soll.

Diese Gleichung

$$\delta V_b = 0$$

giebt aber, wenn man $\frac{1}{[\lambda \cdot \partial F_{V_1}]_b} = 0$ nicht berücksichtigt, und

wenn man statt M wieder seinen Werth setzt,

7) $0 = \int_{b\div a} (\lambda \cdot \partial F_y \cdot \delta y + \lambda \cdot \partial F_{y_1} \cdot \partial\delta y + \lambda \cdot \partial F_{y_2} \cdot \partial^2\delta y + \cdots) \cdot dx,$

d. h. wenn man nach (V.) umformt,

---

gebracht werden kann, so hat man genau wieder die Aufgabe der Nummer (V.).

8) $0 = \int_{b\div a}[\lambda\cdot\partial F_y - \partial(\lambda\cdot\partial F_{y_1}) + \partial^2(\lambda\cdot\partial F_{y_2}) - \cdots]\cdot\delta y\cdot dx$
$+[(\lambda\cdot\partial F_{y_1} - \partial(\lambda\cdot\partial F_{y_2}) + \cdots)\cdot\delta y]_{b\div a} + [(\lambda\cdot\partial F_{y_2} - \cdots)\cdot\partial\delta y]_{b\div a}$
$+ \cdots\cdots,$

woraus dann zunächst

9) $0 = \lambda\cdot\partial F_y - \partial(\lambda\cdot\partial F_{y_1}) + \partial^2(\lambda\cdot\partial F_{y_2}) - \cdots$

hervorgeht. Eliminirt man aber aus den Gleichungen (5. u. 9.) jede Spur von $\lambda$ (nach §. 281. oder §. 282. Anmerkg. 1. d. V. Th. d. S.), so erhält man die gesuchte allgemeine Gleichung für das Maximum und Minimum. — Die übrigen Glieder in (8.) dienen dann zur Bestimmung der Konstanten. — Dabei kann es nicht als überflüssig erscheinen, wenn wir besonders noch darauf aufmerksam machen, daß aus den Gleichungen (5. und 9.) auch y eliminirt werden kann, daß man dann eine Differenzialgleichung zwischen $\lambda$ und x erhält, daß man also, gerade weil diese Gleichung $\lambda$ noch nicht völlig bestimmt, sondern noch willkührliche Konstanten zuläßt, in dem weiteren Verlaufe der Untersuchung so viele spezielle Werthe von $\lambda$, als in $\lambda$ willkührliche Konstanten eingehen, beliebig und demnach auch so annehmen kann, daß aus den Grenzgleichungen die speziellen Werthe von V und dessen Ableitungen ebenfalls herausfallen.

Man lese nun die Aufgabe (31.) des zweiten Anhanges.

Anmerkg. Wir beschließen aber hiermit die Aufzählung einzelner Fälle der allgemeinsten Aufgabe des (§. 474.) in der Ueberzeugung, daß man nach denselben auch jeden andern noch zusammengesetzteren Fall wird behandeln können, um so mehr, da der (§. 474.) die ganze Methode, dieser letztere (§. 477.) dagegen alle die wichtigsten und erfolgreichsten Rechnungsvortheile heraushebt, die je in den einzelnen Beispielen der Anwendung vorkommen können.

Wer übrigens noch mehr in das Einzelne eingehen, oder wer das Ganze in seiner Allgemeinheit näher ausgeführt sehen will, den müssen wir wiederholt auf die „Lehre vom Größten und Kleinsten, Berlin 1825" verweisen.

# Erster Anhang.

## Uebungs-Aufgaben, welche zu totalen Differenzialgleichungen führen.

# Erster Anhang.

## Uebungs-Aufgaben, welche zu totalen Differenzialgleichungen führen.

### Vorerinnerung.

Dieser erste Anhang enthält geometrische Aufgaben, welche zu totalen Differenzialgleichungen führen, so daß entweder die Integrale dieser letztern, oder ihre singulären Werthe die Aufgabe selbst lösen. Er ist also gewissermaßen für solche Anfänger bestimmt, welche die Anwendungen der höhern Analysis einstweilen in ihrer einfachsten Gestalt kennen lernen wollen. — Die folgenden Theile dieses Systems werden gelegentlich zu Anwendungen führen, in denen Parzialgleichungen erscheinen, so daß die Integration dieser letztern eintreten muß.

Um aber dem ersten Anfänger den Gesichtspunkt zu eröffnen, aus welchem derselbe diese Aufgaben zunächst anzusehen hat, so erinnern wir denselben noch an Folgendes:

Jede Anwendung der Algebra oder Analysis besteht aus 2 Theilen. Der erste Theil besteht darin, daß die Aufgabe in Gleichung gebracht (angesetzt) wird; der andre Theil dagegen besteht darin, daß die Gleichung weiter behandelt und auf die Form gebracht wird, wie sie der Beantwortung der Aufgabe am angemessensten ist. In den gemeinen algebraischen Aufgaben nennt man dieses letztere Geschäft das Auflösen der Gleichung, und mit diesem Geschäft ist in der Regel die Auflösung der Aufgabe beendigt.

Auch bei den hiesigen Aufgaben mag der Anfänger wohl thun, wenn derselbe diese zwei Hauptmomente unterscheidet, nämlich:

1) den Ansatz, welcher hier aber immer zu einer Differenzialgleichung führen wird; und

2) die Auflösung dieser Gleichung, welche hier allemal damit beginnen muß, daß man diese erhaltene Differenzialgleichung integrirt, d. h. alle ihr genügenden Urgleichungen aufsucht, die alle in einer einzigen Urgleichung mit einer oder mit mehreren willkührlichen Konstanten enthalten sind, mit Ausnahme der singulären Werthe (Vgl. V. Th. d. S. Kap. XII.), welche ebenfalls gefunden werden müssen, in so ferne sie der durch den Ansatz erhaltenen Differenzialgleichung ebenfalls genügen, folglich die gegebene Aufgabe ebenfalls lösen können. — Zuletzt muß man aber unter allen diesen genügenden Urgleichungen diejenige heraussuchen, welche noch den übrigen Bedingungen der Aufgabe genügt, den Bedingungen nämlich, die nicht schon in der Gleichung des Ansatzes ausgesprochen werden konnten, und die daher später erst berücksichtigt werden müssen. Dies ist aber der dritte Theil des Geschäfts, welcher bei diesen Aufgaben noch besonders zu beachten ist, und welcher die Bestimmung der Konstanten genannt werden kann.

## Aufgabe I.

Die Kurve $y = y_x$ *) zu finden, deren Subtangente irgend eine gegebene Funktion $f_x$ der Abscisse $x$ ist.

Auflösung. Nach dem (Anhange zum IV. Th. d. S. pag. 42.) ist die Subtangente

$$= \frac{y}{\partial y_x};$$

also ist die Aufgabe angesetzt in der Gleichung

$$1) \qquad \frac{y}{\partial y_x} = f_x,$$

so daß diese Gleichung nur noch aufgelößt, d. h. zunächst integrirt werden muß.

Zu dem Ende giebt man ihr die Form

$$2) \qquad \frac{\partial y_x}{y} = \frac{1}{f_x},$$

*) Es werden hier, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird, immer rechtwinkliche Koordinaten-Axen vorausgesetzt, also auch rechtwinkliche Koordinaten.

damit in ihr die Veränderlichen getrennt sind, und links und rechts die Integrale nach allem x genommen werden können; und dann erhält man, wenn X irgend eines der besonderen Integrale von $\int \frac{1}{f_x} \cdot dx$ ist,

3) $log\ y = X + c$, oder $y = C \cdot e^X$

als die Gleichung für die gesuchte Kurve, wo c oder C eine willkührliche Konstante ist.

1) Sollte $f_x = x^2$ seyn, so erhielte man

$$X = \int \frac{1}{x^2} \cdot dx = -\frac{1}{x},$$

also $log\ y = -\frac{1}{x} + c$, oder $y = e^{-\frac{1}{x}+c} = C \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

2) Sollte aber die Subtangente an jedem Punkte der gesuchten Kurve konstant seyn und $= a$, so wäre

$$f_x = a, \quad X = \int \frac{1}{f_x} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot x;$$

und die Gleichung der gesuchten Kurve wäre dann

$$log\ y = \frac{1}{a} \cdot x + c, \quad \text{oder} \quad y = C \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot x}.$$

3) Sollte endlich die Subtangente mit der Abscisse ein konstantes Verhältniß b behalten, so wäre

$$f_x = b \cdot x, \text{ also } X = \int \frac{1}{f_x} \cdot dx = \frac{1}{b} \cdot log\ x;$$

folglich wäre dann die Gleichung für die gesuchte Kurve

$$log\ y = \frac{1}{b} \cdot log\ x + c; \text{ d. h. } y = C \cdot x^{\frac{1}{b}}, \text{ oder } C \cdot x = y^b,$$

indem man zuletzt statt $C^b$ wiederum C schreibt.

Anmerkung. In allen den verschiedenen Fällen dieser Aufgabe erhält man allemal eine Gleichung für die Kurve mit einer willkührlichen Konstante. Giebt man nun dieser Konstante nach und nach verschiedene Werthe, so erhält man verschiedene Kurven, (wenn nicht dieselbe Kurve in verschiedener Lage gegen

die Axen), welche der Aufgabe ein Genüge leisten. Sucht man aber unter allen diesen Kurven diejenige, welche auch noch durch einen gegebenen Punkt hindurchgeht, dessen Koordinatenwerthe beziehlich $\alpha$ und $\beta$ sind, so muß die Konstante C so seyn, daß die Gleichung für $x = \alpha$, auch $y = \beta$ liefert, und dadurch bestimmt sich die Konstante C. —

In dem Falle (3.) z. B. würde man, dieser Bedingung gemäß, erhalten

$$C \cdot \alpha = \beta^b, \quad \text{also} \quad C = \frac{\beta^b}{\alpha},$$

so daß die Gleichung der gesuchten Kurve wird

$$\beta^b \cdot x = \alpha \cdot y^b, \quad \text{oder} \quad \frac{x}{\alpha} = \left(\frac{y}{\beta}\right)^b.$$

Man kann aber unter den unendlich vielen Kurven, oder unter den unendlich vielen Lagen einer und derselben Kurve gegen die Axen, welche man durch Veränderung des Werthes der Konstante erhält, auch diejenige heraussuchen, welche irgend einer andern Bedingung genügt, z. B. welche an dem zu der Abscisse $\alpha$ gehörigen Punkte die Eigenschaft hat, daß ihre Tangente mit der Abscissen-Axe einen gegebenen Winkel $\psi$ bildet. Diese Bedingung schreibt sich nach (IV. Th. d. S. Anhang Nr. 40. nnd V. Th. d. S. §. 204.)

$$[\partial y_x]_\alpha = tg\,\psi,$$

und aus dieser Gleichung muß also die Konstante bestimmt werden.

In dem Falle (2.) z. B. findet sich

$$\partial y_x = \frac{1}{a} \cdot C \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot x};$$

und die vorliegende Gleichung wird also dasmal

$$\frac{1}{a} \cdot C \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot \alpha} = tg\,\psi \quad \text{oder} \quad C = a \cdot e^{-\frac{\alpha}{a}} \cdot tg\,\psi;$$

so daß die Gleichung der Kurve nun wird

$$y = a \cdot e^{\frac{x-\alpha}{a}} \cdot tg\,\psi.$$

Durch welche gegebenen Bedingungen aber die eingehenden Konstanten bestimmt werden mögen, so können solche doch allemal nur Eigenschaften eines einzigen oder einiger einzelner Punkte der Kurve aussprechen. Bedingungen, welchen alle Punkte der Kurve zu genügen haben, bestimmen allemal die Form der Kurve, also allemal die Form der Gleichung, dagegen nicht einzelne ihrer Koeffizienten, die noch unbestimmt geblieben seyn sollten.

## Aufgabe 2.

Wird die Kurve gesucht, deren Subnormale an jedem ihrer Punkte konstant und $= a$ ist, so hat man zu ihrer Bestimmung, nach (IV. Th. d. S. Anhang pag. 42.), die Gleichung

$$1) \qquad y \cdot \partial y_x = a.$$

Nimmt man von dieser das Integral nach allem x, links und rechts, so erhält man sogleich

$$2) \qquad \tfrac{1}{2} y^2 = a \cdot x + c$$

oder

$$3) \qquad y^2 = 2a \cdot x + 2c,$$

welches die Gleichung einer Parabel ist.

Soll diese Parabel durch den Anfangspunkt der Koordinaten hindurchgehen, so muß sie für $x = 0$, auch $y = 0$ geben, d. h. sie muß identisch werden, wenn man $x = 0$ und zu gleicher Zeit auch $y = 0$ setzt. Dies führt aber zu

$$c = 0,$$

so daß dann

$$4) \qquad y^2 = 2a \cdot x$$

die Gleichung der gesuchten Kurve ist. *)

## Aufgabe 3.

Wird die Kurve gesucht, in welcher die Subnormale an je-

---

*) Daß in der Parabel die Subnormale konstant und dem halben Parameter gleich ist, pflegt in der Lehre der Kegelschnitte nachgewiesen zu werden. Die Lösung der hiesigen Aufgabe zeigt dagegen, daß die Parabel unter allen Kurven die einzige ist, welche sich dieser Eigenschaft erfreut.

dem ihrer Punkte dem Abscissenwerth x gleich ist, so hat man die Gleichung

$$1) \qquad y \cdot \partial y_x = x;$$

und nimmt man hier links und rechts die Integrale nach allem x, so erhält man

$$2) \qquad \tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{1}{2}x^2 + c$$

d. h. $$3) \qquad y^2 = x^2 + 2c,$$

welches die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel ist.

Soll diese Hyperbel zu gleicher Zeit durch den Punkt $(\alpha, \beta)$ *) hindurchgehen, so hat man noch zur Bestimmung der Konstante c die Gleichung

$$\beta^2 = \alpha^2 + 2c \quad \text{oder} \quad 2c = \beta^2 - \alpha^2,$$

so daß die Gleichung (3.) der Hyperbel in folgende übergeht, nämlich in

$$4) \qquad y^2 = x^2 + \beta^2 - \alpha^2.$$

Ist der Punkt, durch welchen die gesuchte Kurve noch hindurchgehen soll, der Anfangspunkt der Koordinaten, ist also $\beta = \alpha = 0$, so geht die Gleichung (4.) noch über in

$$5) \qquad y^2 = x^2 \quad \text{oder} \quad y = \pm x,$$

welches die Gleichungen für zwei gerade und auf einander senkrechte Linien sind.

Dieses letztere Ereigniß tritt übrigens allemal ein, so oft verlangt wird, daß die Kurve durch einen Punkt hindurchgehen soll, für welchen $\beta^2 = \alpha^2$ ist.

## Aufgabe 4.

Die Kurve zu finden, welche alle Kurven einer gegebenen Art **) u nt einem und demselben Winkel schneidet.

---

*) Unter einem Punkte $(\alpha, \beta)$ verstehen wir allemal den Punkt, dessen Abscissenwerth $\alpha$ ist, und welcher $\beta$ zu seinem Ordinatenwerthe hat.

**) Unter Kurven einer gegebenen Art versteht man alle Kurven, deren Gleichung aus einer einzigen gegebenen Gleichung $f_{x,y,\alpha} = 0$

Es stelle

1) $$f_{x',y',\alpha} = 0$$

die Gleichung aller geschnittenen Kurven DN, D'N', $D_1N_1$, ꝛc. (Fig. 8.) vor, und x und y seyen die Koordinaten eines beliebigen Punktes M der gesuchten Kurve $M_1$ M M' U; ferner sey MX' mit der Abscissen-Axe OX parallel gedacht, während immer rechtwinkliche Koordinaten vorausgesetzt werden. Sind endlich MV, MZ die Tangenten der gegebenen und der gesuchten Kurve in ihrem Durchschnittspunkte M, so ist ZMV der gegebene Winkel, welcher bei allen übrigen geschnittenen Kurven, also für jeden andern Werth von $\alpha$ immer derselbe bleiben soll. Nun ist aber

2) $$\text{w. ZMV} = \text{w. ZMX'} - \text{w. VMX'},$$

also

3) $$tg\ \text{ZMV} = \frac{tg\ \text{ZMX'} - tg\ \text{VMX'}}{1 + tg\text{ZMX'} \cdot tg\text{VMX'}}.$$

Zu gleicher Zeit ist noch

4) $tg\ \text{ZMX'} = \partial y_x$ und 5) $tg\ \text{VMX'} = p$,

wenn unter p das verstanden wird, was aus der Ableitung $\partial y'_{x'}$ wird, sobald man diese Ableitung als Funktion von x', y' und $\alpha$ herstellt, dann aber beziehlich x und y statt x' und y' setzt, (weil in dem Durchschnittspunkte M die Koordinaten beider Kurven dieselben sind).

Wird nun die Tangente des gegebenen Winkels ZMV durch a bezeichnet, so geht die Gleichung (3.) über in

6) $$a = \frac{\partial y_x - p}{1 + p \cdot \partial y_x} \quad \text{oder} \quad a \cdot (1 + p \cdot \partial y_x) + p - \partial y_x = 0.$$

Da nun die gegebene Gleichung (1.), nämlich $f_{x',y',\alpha} = 0$, identisch werden muß, wenn man die Koordinaten x und y eines ihrer Punkte M statt x' und y' setzt, so hat man noch

7) $$f_{x,y,\alpha} = 0;$$

---

dadurch hervorgeht, daß man der Konstante $\alpha$ alle stetig neben einander liegenden verschiedenen Werthe ertheilt.

und eliminirt man nun aus den Gleichungen (6. und 7.) die Konstante (den Parameter) $\alpha$, so hat man eine Gleichung, welche für jeden Werth von $\alpha$ gilt, welche also für alle die übrigen geschnittenen Kurven $D_1N_1$, $D'N'$ 2c. 2c. gilt, daher auch für alle übrigen Durchschnittspunkte $M_1$, $M'$, 2c. 2c., wenn unter x und y dessen Koordinaten verstanden werden. Diese zuletzt erhaltene Gleichung ist also die Gleichung der gesuchten Kurve.

Man wird demnach die Gleichung der gesuchten Kurve erhalten, wenn man in die Gleichung der gegebenen Kurve x und y beziehlich statt x' und y' setzt, dann solche Gleichung

$$f_{x,y,\alpha} = 0$$

differenziirt, also die Gleichung

$$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0$$

bildet, aus diesen beiden Gleichungen die Konstante $\alpha$ eliminirt, dann $\partial y_x$ findet, in x und y (und natürlich ohne $\alpha$) ausgedrückt, zuletzt aber direkt den Werth von $\partial y_x$ (in x und y ohne $\alpha$) statt p in die Gleichung (6.) substituirt.

Diese Gleichung (6.), oder vielmehr diese aus (6) auf die letzt beschriebene Weise hervorgehende Gleichung der gesuchten Kurve, ist jedoch eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung. Sie bildet den Ansatz der Aufgabe. Wird sie nun noch integrirt, so kann man gewissermaßen nun erst die Auflösung dieser Gleichung, also auch erst die Auflösung der Aufgabe, zu Ende bringen.

Beispiel 1. Es sey z. B. statt der Gleichung $f_{x',y',\alpha} = 0$ gegeben die Gleichung einer Parabel

1') $$y^2 = \alpha \cdot x,$$

so liefert sie

2') $$2y \cdot \partial y_x = \alpha,$$

also durch Elimination des $\alpha$ aus (1'. und 2'.)

3') $$y = 2x \cdot \partial y_x, \text{ mithin } p = \frac{y}{2x}.$$

Dieser Werth statt p in die Gleichung (6.) substituirt giebt

$$4') \qquad a\cdot\left(1+\frac{y}{2x}\cdot\partial y_x\right)+\frac{y}{2x}-\partial y_x=0$$

oder

$$5') \qquad 2a\cdot x+y+(ay-2x)\cdot\partial y_x=0.$$

Um nun diese Gleichung zu integriren, so bemerkt man zunächst, daß sie nach x und nach y homogen ist, und behandelt sie daher nach (pag. 83. d. VI. Th. d. S.). Man setzt

$$6') \qquad y=x\cdot v, \text{ also } \partial y_x=x\cdot\partial v_x+v,$$

und sie geht über in

$$7') \qquad (2a-v+a\cdot v^2)+(a\cdot v-2)\cdot x\cdot\partial v_x=0,$$

oder

$$8') \qquad \frac{\partial x_v}{x}+\frac{a\cdot v-2}{a\cdot v^2-v+2a}=0,$$

in welcher Gleichung die Veränderlichen getrennt sind, so daß man erhält, indem man die Integrale nach allem v nimmt,

$$log\ x+\int\frac{av-2a}{av^2-v+2a}\cdot dv=c, \text{ oder } =log\ c$$

d. h.

$$log\ c=log\ x+\frac{-3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}}\cdot log\left(v-\frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right)$$
$$+\ \frac{3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}}\cdot log\left(v-\frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right)$$

oder

$$x\cdot\left(\frac{y}{x}-\frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right)^{\frac{-3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}}}\cdot\left(\frac{y}{x}-\frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right)^{\frac{3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}}}=c;$$

und dies ist die Gleichung für die gesuchte Kurve. *)

Beispiel 2. Ist statt $f_{x',y',\alpha}=0$ bloß die Gleichung einer geraden Linie, nämlich

---

*) Ist $8a^2>1$, also $a>\frac{1}{2\sqrt{2}}$, so kann man die imaginären Potenzen nach dem (Kap. 26. d. II. Th. d. S.) in reele Bogen übertragen; oder man kann

$$\int\frac{av-2}{av^2-v+2a}\cdot dv$$

sogleich direkt in Bogen ausdrücken nach (§. 177. d. IV. Th. d. S.).

$$y = \alpha \cdot x$$

gegeben, so hat man

$$\partial y_x = \alpha, \quad \text{also} \quad p = \frac{y}{x};$$

und die Gleichung (6.) wird nun

$$a + a \cdot \frac{y}{x} \cdot \partial y_x + \frac{y}{x} - \partial y_x = 0,$$

oder

$$a \cdot x + y + (a \cdot y - x) \cdot \partial y_x = 0.$$

Für

$$y = x \cdot v, \quad \partial y_x = x \cdot \partial v_x + v,$$

geht diese Gleichung über in

$$\frac{\partial x_v}{x} + \frac{av - 1}{av^2 + a} = 0$$

oder

$$log\, x + \int \frac{av - 1}{av^2 + a} \cdot dv = c,$$

woraus

$$a \cdot log\,(c \cdot \sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{Tg}\,\frac{y}{x}$$

als die Gleichung der gesuchten Kurve hervorgeht.

Und weil allemal in das Integral eine willkührliche Konstante c eingeht, so kann man die Kurve noch an einer bestimmten Stelle einer neu hinzutretenden Bedingung genügen lassen, z. B. der Bedingung, daß die Kurve noch durch einen gegebenen Punkt hindurchgehe, oder daß die Tangente an einem bestimmten ihrer Punkte (der etwa zu $x = g$ gehört) eine gegebene Lage habe; oder einer ähnlichen. *)

---

*) Man nennt diese hier gesuchten Kurven Trajektorien, und diese werden wieder rechtwinkliche Trajektorien genannt, wenn der gegebene Winkel ein rechter, wenn also $\frac{1}{a} = 0$ ist. — Für die rechtwinklichen Trajektorien wird die Gleichuug (6.) bloß diese

$$1 + p \cdot \partial y_x = 0.$$

In dem 2ten Beispiel, wo $p = \frac{y}{x}$, hat man für die rechtwinkliche Trajektorie die Gleichung

## Weitere Bemerkungen zur Integration der für die Trajektorien gefundenen Differenzialgleichung.

In den Fällen, wo sich aus den Gleichungen (6. und 7.) $\alpha$ nicht leicht eliminiren läßt, ist es zuweilen vortheilhaft, in die Gleichung (6.), nämlich in

$$6) \qquad a\cdot(1+p\cdot\partial y_x)+p-\partial y_x = 0,$$

$\alpha$ als einen neuen Veränderlichen einzuführen, gegeben durch die Gleichung (7.), d. h. durch

$$7) \qquad f_{x,y,\alpha} = 0,$$

und dann y zu eliminiren, d. h. nach Anleitung des (§. 353. d. VI. Th. d. S.) zu verfahren, um die neue Differenzialgleichung zwischen x und a zu erhalten.

Läßt sich z. B. die Gleichung $f_{x,y,\alpha} = 0$ leichter nach y, als nach $\alpha$ auflösen, so daß sie

$$y = y_{x,\alpha},$$

und, wenn man das Verfahren des (§. 353. d. VI. Th. d. S.) einleitet,

$$\partial y_x = p+\partial y_\alpha\cdot\partial\alpha_x = p+q\cdot\partial\alpha_x$$

giebt, wenn p die frühere Bedeutung behält, dagegen $\partial y_\alpha$ durch q bezeichnet wird, so geht die Gleichung (6.) über in

$$8) \qquad a\cdot(1+p^2)-(1-a\cdot p)\cdot q\cdot\partial\alpha_x = 0,$$

wo p und q bloße Funktionen von x und $\alpha$ vorstellen. Diese Gleichung (8.) ist also eine Differenzialgleichung zwischen x und $\alpha$. Wird dieselbe nun integrirt, und dann aus ihr und $f_{x,y,\alpha} = 0$ dieser eingeführte Veränderliche $\alpha$ wiederum eliminirt, so hat man die Urgleichung zwischen x und y für die gesuchte Trajektorie.

Man kann aber natürlich auch statt dieses Veränderlichen

---

$$1+\frac{y}{x}\cdot\partial y_x = 0, \quad \text{oder} \quad x+y\cdot\partial y_x = 0.$$

Diese giebt, integrirt, $\qquad x^2+y^2 = r^2,$

wo $r^2$ eine willkührliche Konstante ist, so daß diesmal die gesuchte Kurve eine Kreislinie ist, wie solches voraus zu sehen war.

$\alpha$, welcher statt y eingeführt wurde, wiederum einen neuen Veränderlichen z einführen durch eine neue Gleichung zwischen den alten und neuen Veränderlichen, wenn man nur immer genau nach Anleitung des (§. 353. d. VI. Th. d. S.) verfährt, um die neue Differenzialgleichung zwischen den jetzigen beiden Veränderlichen zu erhalten; immer in der Hoffnung, daß sich letztere bequemer werde integriren lassen als erstere.

Sucht man z. B. die Trajektorie für alle Cykloiden, welche aus der Differenzialgleichung

1′) $$\partial y_x = \frac{x}{\sqrt{2\alpha \cdot x - x^2}}$$

dadurch hervorgehen, daß man den Radius $\alpha$ des Erzeugungskreises sich stetig ändern läßt, so wird die Urgleichung derselben Cykloide, wenn man integrirt, und wenn man voraussetzt, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, diese:

2′) $$y = -\sqrt{2\alpha \cdot x - x^2} + \alpha \cdot \frac{1}{Cos}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right).$$

Die Gleichung der Trajektorie ist also dasmal aus (6.)

3′) $$a \cdot \left(1 + \frac{x \cdot \partial y_x}{\sqrt{2\alpha x - x^2}}\right) + \frac{x}{\sqrt{2\alpha x - x^2}} - \partial y_x = 0,$$

sobald statt $\alpha$ der aus (2′.) zu ziehende Werth in y und x gedacht wird.

Führt man dagegen $\alpha$ als neuen Veränderlichen ein, durch die Gleichung (2′.) selbst gegeben, so wird die Gleichung der Trajektorie, weil jetzt

$$p = \frac{x}{\sqrt{2\alpha \cdot x - x^2}} \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{Cos}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)$$

wird, aus (8.) auch folgende

4′) $$a \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2\alpha \cdot x - x^2}\right) - \left(1 - a \cdot \frac{x}{\sqrt{2\alpha \cdot x - x^2}}\right) \cdot \frac{1}{Cos}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \cdot \partial \alpha_x = 0.$$

Weil man aber immer noch nicht sieht, wie die Integration dieser Gleichung von Statten gehen soll, so führe man statt $\alpha$ noch einen neuen Veränderlichen z ein, gegeben durch die Gleichung

5′) $$\frac{x}{\alpha} = z, \quad \text{oder} \quad x = \alpha \cdot z,$$

und verfahre nach (§. 353. d. VI. Th. d. S.), d. h. differenziire diese letztere Gleichung nach allem x, um

6′) $$1 = \alpha \cdot \partial z_x + z \cdot \partial \alpha_x$$

zu erhalten, und um aus (4′.5′. und 6′.) sowohl $\alpha$ als auch $\partial\alpha_x$ eliminiren zu können, und so zuletzt eine Gleichung bloß zwischen x, z und $\partial z_x$ zu haben. Weil jedoch aus (5′. und 6′.) $\alpha = \frac{x}{z}$ und

$\partial\alpha_x = \frac{z - x\cdot\partial z_x}{z^2}$ hervorgeht, so darf man nur in (4′.) statt $\alpha$ und $\partial\alpha_x$ überall diese Werthe substituiren, und man hat diese neue Gleichung unmittelbar, nämlich

$$7') \quad \left[\frac{2a}{2-z} - \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z-z^2}}\right)\cdot\frac{1}{Cos}(1-z)\right] + \frac{x\cdot\partial z_x}{z}\left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z-z^2}}\right)\cdot\frac{1}{Cos}(1-z) = 0,$$

oder, wenn man $\frac{1}{\partial x_z}$ statt $\partial z_x$ schreibt, und schicklich wegdividirt,

$$8') \quad \frac{\partial x_z}{x} + \frac{\left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z-z^2}}\right)\cdot\frac{1}{Cos}(1-z)}{z\cdot\left[\frac{2a}{2-z} - \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z-z^2}}\right)\cdot\frac{1}{Cos}(1-z)\right]} = 0,$$

in welcher Gleichung die Veränderlichen getrennt sind, so daß nun von jedem Gliede das Integral nach allem z genommen werden kann. Die Integration ist wenigstens nun auf die Integration einer gegebenen Funktion von z, nach z, zurückgeführt, d. h. auf die Methoden, welche im (IV. Th. d. S.) beschrieben worden sind.

Wird aber diese Gleichung (8′.) integrirt, so daß man eine Urgleichung zwischen x und z mit einer willkührlichen Konstante erhält, so werden aus dieser Gleichung, aus der Gleichung (3′.) und aus der Gleichung (2′.), die beiden Veränderlichen $\alpha$ und z noch auf algebraischem Wege zu eliminiren seyn, wenn man die Urgleichung dieser Trajectorie zwischen x und y selber ausgedrückt haben will.

Anmerkg. Ist statt der Gleichung $f_{x,y,\alpha} = 0$ bloß eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung gegeben, z. B.

$$9) \quad \partial y_x = p_{\alpha,x,y},$$

und enthält p zunächst auch nicht y, so daß die gegebene Differenzialgleichung noch einfacher und diese ist:

$$10) \quad \partial y_x = p_{\alpha,x};$$

so ist die Urgleichung der gegebenen Kurve diese, nämlich

11) $$y = \int_{x \div b} p \cdot dx,$$

wo b als eine bestimmte Konstante angesehen werden kann. Dann wird aber (nach dem V. Th. d. S. §. §. 219—224.)

12) $$\partial y_\alpha = \int_{x \div b} \partial p_\alpha \cdot dx, \quad \text{also} \quad q = \int_{x \div b} \partial p_\alpha \cdot dx;$$

und die Gleichung (8.) der Trajektorie wird nun

13) $$a \cdot (1 + p^2) - (1 - a \cdot p) \cdot \partial \alpha_x \cdot \int_{x \div b} \partial p_\alpha \cdot dx = 0.$$

Sollte daher, wenn auch nicht $\int p \cdot dx$, aber doch $\int \partial p_\alpha \cdot dx$ bequem hergestellt werden können, so hätte man die Gleichung (13.) hergestellt, so daß ihre Integration weiter versucht werden kann, in so ferne sie dann bloß x, $\alpha$ und $\partial \alpha_x$ enthält.

In dem andern Falle dagegen, wo die Gleichung (10.) nicht, sondern dafür die Gleichung (9.) gegeben ist, d. h. wo der Ausdruck p in (9.) wirklich auch noch y enthält, kann man q, nämlich $\partial y_\alpha$, nicht mehr direkt finden, und man muß daher nun aus den Gleichungen (6. und 9.) jede Spur von $\alpha$ (als Funktion von x) nach dem (§. 281. d. V. Th. d. S.) eliminiren, wodurch man zu einer Differenzialgleichung der 2ten Ordnung geführt wird. — Statt aber aus den Gleichungen (6. und 9.) jede Spur von $\alpha$ zu elimininen, kann man auch eben so gut jede Spur von y elimininen, so daß man zu einer Differenzialgleichung der 2ten Ordnung zwischen x, $\alpha$, $\partial \alpha_x$ und $\partial^2 \alpha_x$ gelangt. Eine der beiden eingehenden willkührlichen Konstanten gehört übrigens dann den nur durch eine Differenzialgleichung gegebenen geschnittenen Kurven an, welche alle einer gemeinschaftlichen Bedingung noch unterworfen werden können, während die andre Konstante offenbar der gesuchten Trajektorie selbst zukommt. *)

---

*) Uebrigens bemerken wir hier noch der Anfänger wegen, daß die Trajektorien keine eigenthümliche Gattung von Kurven sind, so wenig z. B. wie die Evoluten; daß jede gegebene Kurve eine Trajektorie seyn kann in Bezug auf eine gegebene Reihe von Kurven einer und derselben Art; und daß man sogar die Aufgabe umkehren und die Reihen der Kurven einer gegebenen Art zu finden verlangen könnte, zu welcher irgend eine gegebene Kurve Trajektorie ist.

## Aufgabe 5.

Man soll die Kurve finden, in welcher an jedem ihrer Punkte der Krümmungshalbmesser der Normale gleich ist.

Die gesuchte Gleichung der Kurve ist dasmal offenbar nach (IV. Th. d. S. Anhang pag. 42—47.) diese:

$$\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = y\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2},$$

d. h. wenn man auf die Zweideutigkeit der Wurzeln Rücksicht nimmt,

$$\mp y\cdot\partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1 = 0.$$

A. Nehmen wir zunächst die Gleichung

$$1) \qquad +y\cdot\partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1 = 0,$$

um sie zu integriren, und führen wir zu diesem Behufe den neuen Veränderlichen v durch die Gleichung

$$2) \qquad y\cdot\partial y_x = v$$

ein, *) so daß aus (2.) durch Differenziiren

$$3) \qquad y\cdot\partial^2 y_x + \partial y_x^2 = \partial v_x$$

hervorgeht; so geht die Gleichung (1.) über in

$$4) \qquad \partial v_x + 1 = 0,$$

und giebt, nach allem x integrirt,

$$5) \qquad v + x = c,$$

d. h. $6) \quad y\cdot\partial y_x + x = c$ oder $y\cdot\partial y_x + (x-c) = 0.$

Nimmt man hier, wo die Veränderlichen getrennt sind, auf's neue das Integral nach allem x, so erhält man

$$7) \qquad y^2 + (x-c)^2 = r^2,$$

wo c und $r^2$ die Konstanten sind. Diese Gleichung (7.) ist aber die Gleichung einer Kreislinie, welche ihren Mittelpunkt in der Abciffen-Axe hat, und deren Radius $= r$ ist.

---

*) Man bemerkt nämlich sogleich bei dem Anblick der Gleichung (1.), daß die beiden ersten Glieder derselben nichts anders als die Ableitung von $y\cdot\partial y_x$ sind.

B. Nehmen wir die andere Gleichung

1) $$-y\cdot\partial^2 y_x+\partial y_x^2+1=0,$$

und führen wir wieder, um sie zu integriren, einen neuen Veränderlichen v, aber durch die Gleichung

2) $$\partial y_x = v$$

ein, so daß

3) $$\partial^2 y_x = \partial v_x$$

wird, so geht die Gleichung (1.) in folgende über:

4) $$-y\cdot\partial v_x+1+v^2=0, \text{ oder } \partial v_x = \frac{1+v^2}{y},$$

oder, wenn man diese Gleichung durch $\partial y_x = v$ dividirt, (nach §. §. 58—60. d. III. Th. d. S.)

5) $$\partial v_y = \frac{1+v^2}{v\cdot y};$$

oder, weil $\partial v_y = \frac{1}{\partial y_v}$ ist,

6) $$\frac{v}{1+v^2} = \frac{\partial y_v}{y}.$$

In dieser Gleichung sind die Veränderlichen getrennt, und sie giebt, wenn man links und rechts die Integrale nach allem v nimmt,

7) $$y = a\cdot\sqrt{1+v^2} \text{ oder } \frac{y^2}{a^2} = 1+v^2, \text{ *)}$$

wo a eine willkührliche Konstante ist.

---

*) Diese Gleichung

$$y = a\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}$$

giebt, wenn man links und rechts die Integrale nach x nimmt,

$$\int y\cdot dx = a\cdot\int\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx;$$

und diese letztere Gleichung lehrt uns, daß in dieser Kurve der Inhalt $\int y\cdot dx$ allemal das afache des Bogens

$$\int\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx$$ ist.

In dieser Kurve verhalten sich also die Inhalte, wie die zugehörigen

Setzt man aber hier statt v wiederum seinen Werth $\partial y_x$, so ist die Gleichung (7.), jetzt

$$8) \qquad \frac{y^2}{a^2} = 1 + \partial y_x^2 ,$$

noch eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung, und muß daher auf's neue integrirt werden, wenn man eine Urgleichung zwischen x und y haben will.

Um sie zu integriren, setze man, da selbige nicht x enthält, $1 : \partial x_y$ statt $\partial y_x$, und löse sie dann nach $\partial x_y$ algebraisch auf; und man erhält

$$9) \qquad \partial x_y = \frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}} ,$$

also, wenn man links und rechts nach y integrirt,

$$10) \quad x = a \cdot \int \frac{1}{\sqrt{y^2 - a^2}} \cdot dy = b + a \cdot log \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a} ,$$

wo b eine neue willkührliche Konstante ist. Diese Gleichung (10.) giebt noch

$$y + \sqrt{y^2 - a^2} = a \cdot e^{\frac{x-b}{a}}$$

$$\text{oder 11)} \qquad y = \tfrac{1}{2} a \cdot \left( e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}} \right) ,$$

wo a und b die beiden eingehenden willkührlichen Konstanten sind. *)

---

Bogen. — Diese Kurve hat übrigens noch mehr Eigenschaften mit dem Kreise gemein. (Vgl. Nova Acta. acad. Petrop. T. IX. p. 178.).

*) Der Unterschied zwischen den Gleichungen

$$+ y \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1 = 0$$

und

$$- y \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1 = 0$$

besteht, da $1 + \partial y_x^2$ immer positiv ist, offenbar darin, daß in der erstern $y \cdot \partial^2 y_x$ negativ, die Kurve daher gegen die Axe concav ist; daß dagegen in der andern Gleichung dasselbe $y \cdot \partial^2 y_x$ positiv wird, die Kurve also gegen die Axe convex liegt. Die Normale, die immer von der Kurve zur Abscissen-Axe geht, fällt also im erstern Falle mit der

## Aufgabe 6.

Man sucht die Kurve, in welcher an jedem ihrer Punkte der Krümmungshalbmesser zu dem Würfel der Normale ein konstantes Verhältniß hat, d. h. in welcher sich die Krümmungshalbmesser zu einander verhalten, wie die Würfel der zugehörigen Normalen.

Es ist der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x};$$

dagegen die Normale

$$= y \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2}.$$

Wird nun das konstante Verhältniß zwischen dem erstern und dem Würfel der letztern c genannt, so hat man als Ansatz der Aufgabe die Gleichung:

$$1) \quad \frac{1}{\partial^2 y_x} = c \cdot y^3 \qquad \text{oder} \qquad 2) \quad \partial^2 y_x = \frac{1}{c \cdot y^3}.$$

Die Auflösung der Aufgabe hängt nun von der Integration dieser Gleichung (1.) oder (2.) ab. Die (2.) hat aber zum integrirenden Faktor $\partial y_x$. Multiplizirt man die Gleichung damit, so erhält man

$$3) \quad \partial y_x \cdot \partial^2 y_x = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial y_x}{y^3}.$$

Nimmt man daher hier links und rechts die Integrale nach al-

---

Richtung des Krümmungshalbmessers zusammen, ist dagegen im andern Falle in der Verlängerung des Krümmungshalbmessers; oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, ist im andern Falle mit dem Krümmungshalbmesser in gerade entgegen gesetzter Richtung.

Jede der Integrationen dieser beiden Gleichungen der 2ten Ordnung in (A.) und in (B.) hat übrigens zu einer Urgleichung mit zwei willkührlichen Konstanten geführt. Alle die aus den verschiedenen Werthen dieser Konstanten hervorgehenden Kurven haben also die verlangte Eigenschaft mit einander gemein. Um eine bestimmte dieser Kurven zu haben, muß man der Aufgabe noch zwei, einzelne Punkte der Kurve betreffende, Bedingungen hinzufügen.

lem x, so ergiebt sich

$$4) \qquad \partial y_x^2 = -\frac{1}{c \cdot y^2} + c_1.$$

Dieses erste Integral der (2.) muß aber nun, da solches noch immer eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung ist, auf's neue integrirt werden. Weil sie jedoch kein x enthält, so muß man $\frac{1}{\partial x_y}$ statt $\partial y_x$ schreiben, sie nach $\partial x_y$ algebraisch auflösen, und dann die Funktion von y, welche man für $\partial x_y$ erhält, nach allem y integriren. Man erhält aber

$$5) \qquad \partial x_y = \frac{c^{\frac{1}{2}} \cdot y}{\sqrt{c_1 \cdot c \cdot y^2 - 1}},$$

woraus

$$6) \quad x = \int \frac{c^{\frac{1}{2}} \cdot y}{\sqrt{c_1 \cdot c \cdot y^2 - 1}} \cdot dy = \frac{1}{c_1 \cdot c^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{c_1 \cdot c \cdot y^2 - 1} + c_2;$$

oder

$$7) \qquad (x - c_2)^2 = \frac{1}{c_1} \cdot y^2 - \frac{1}{c_1^2 \cdot c};$$

und dies ist die Gleichung für eine Linie der 2ten Ordnung, so daß die gesuchte Kurve eine Hyperbel, eine Ellipse, oder eine Parabel seyn wird, je nachdem sich $c_1$ positiv, negativ, oder Null finden sollte. *)

---

*) Löst man die Gleichung (7.) nach y algebraisch auf, so ergiebt sich

$$y^2 = c_1 \cdot x^2 - 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot x + c_1 \cdot c_2^2 + \frac{1}{c \cdot c_1}.$$

Führt man nun statt $c_1$ und $c_2$ zwei neue Konstanten C und C′ so ein, daß

$$-2 \cdot c_1 \cdot c_2 = C \quad \text{und} \quad c_1 \cdot c_2^2 + \frac{1}{c \cdot c_1} = C'$$

wird, so hat man die Gleichung der gesuchten Kurve in der Form

$$y^2 = c_1 \cdot x^2 + C \cdot x + C',$$

wo $c_1$, C und C′ drei Konstanten sind, von denen zweie, als durch die Integration eingegangen, ganz willkührlich sind, während die dritte in so ferne ebenfalls als noch ganz willkührlich angesehen werden kann, als das gedachte konstante Verhältniß des Krümmungshalbmessers zum

## Aufgabe 7.

Es wird die Kurve gesucht, in welcher an jedem ihrer Punkte die Normale zur Quadratwurzel aus der Summe der Abciſſe x und der Subnormale $y \cdot \partial y_x$ ein konſtantes Verhältniß hat.

Dieſe Aufgabe iſt angeſetzt in der Differenzialgleichung

$$1) \qquad y \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} = a \cdot \sqrt{x + y \cdot \partial y_x},$$

und wird aufgelöſt, indem man dieſe Gleichung integrirt. —

Um ſie zu integriren, quadrire und ordne man ſie, und dies giebt

$$2) \qquad y^2 \cdot \partial y_x^2 - a^2 \cdot y \cdot \partial y_x + y^2 - a^2 \cdot x = 0.$$

Löſt man dieſe nach $y \cdot \partial y_x$ algebraiſch auf, ſo erhält man

$$3) \qquad y \cdot \partial y_x = \tfrac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + a^2 \cdot x - y^2}.$$

Führt man hier nun einen neuen Veränderlichen v ein, mittelſt der Gleichung

$$4) \quad \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + a^2 x - y^2} = v, \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{4}a^4 + a^2 \cdot x - y^2 = v^2,$$

und differenziirt man zu dem Ende dieſe Gleichung nach allem x, ſo erhält man

$$5) \qquad \tfrac{1}{2}a^2 - y \cdot \partial y_x = v \cdot \partial v_x;$$

und die Gleichung (3.) geht dadurch über in

$$\tfrac{1}{2}a^2 - v \cdot \partial v_x = \tfrac{1}{2}a^2 \pm v,$$

d. h. in $$6) \qquad \partial v_x = \mp 1;$$

und dieſe, integrirt, giebt

$$7) \qquad v = C \mp x,$$

d. h. $$8) \qquad \tfrac{1}{4}a^4 + a^2 \cdot x - y^2 = (C \mp x)^2$$

oder $$9) \qquad y^2 + x^2 - (a^2 + 2C) \cdot x + C^2 - \tfrac{1}{4}a^4 = 0,$$

in ſo ferne ſtatt $\pm C$ auch bloß C geſchrieben werden kann; und dies iſt die Gleichung einer Kreislinie, deren Halbmeſſer

---

Würfel der Normale nicht gegeben iſt. — Man kann daher nun die geſuchte Kurve noch dreien Nebenbedingungen unterwerfen, welche einzelne Punkte derſelben betreffen.

$= a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + C}$ ist, und deren Mittelpunkt in der Abscissen-Axe liegt, vom Anfangspunkt der Koordinaten um $\frac{1}{2}a^2 + C$ entfernt.

## Aufgabe 8.

Es wird die Kurve gesucht, in welcher sich die Ordinate y zur Subtangente $\frac{y}{\partial y_x}$ verhält, wie eine Konstante a zur Differenz $y - x$ zwischen Ordinate und Abscisse.

Die Aufgabe ist angesetzt in der Gleichung

$$1) \qquad \partial y_x = \frac{a}{y - x}.$$

Führt man nun, um diese Gleichung zu integriren, einen neuen Veränderlichen v ein, durch die Gleichung

$$2) \qquad y - x = v,$$

so daß $3) \qquad \partial y_x - 1 = \partial v_x$

wird, so geht die Gleichung (1.) über in

$$5) \quad 1 + \partial v_x = \frac{a}{v}, \quad \text{oder} \quad 6) \quad \partial v_x = \frac{a}{v} - 1 = \frac{a - v}{v},$$

$$\text{oder} \quad 7) \qquad \partial x_v = \frac{v}{a - v}.$$

Nimmt man nun hier links und rechts die Integrale nach allem v, so hat man

$$8) \quad x = \int \frac{v}{a - v} \cdot dv = a - v - a \cdot log(a - v) + C,$$

$$\text{d. h.} \quad 9) \qquad y - a + a \cdot log(a + x - y) = C;$$

und dies ist die Gleichung der gesuchten Kurve.

Denkt man sich, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, d. h. daß der Anfangspunkt der Koordinaten in einem Punkte der Kurve selbst liegen soll, so dient dies zur Bestimmung der Konstante. Man hat nämlich dann aus (9.), wenn $x = 0$, $y = 0$ gesetzt wird,

$$10) \qquad -a + a \cdot log\, a = C;$$

und setzt man diesen Werth statt C in die (9.), so verwandelt sich letztere in

$$11) \quad y + a \cdot log \frac{a+x-y}{a} = 0$$

oder $$12) \quad y = a \cdot log \frac{a}{a+x-y},$$

d. h. $$13) \quad (a+x-y) \cdot e^{y:a} = a$$

oder $$14) \quad x = a \cdot e^{-y:a} + y - a,$$

wo x in y in entwickelter Form ausgedrückt sich findet.

## Aufgabe 9.

Eine Kurve AMN (Fig. 9.) zu finden, für welche das Verhältniß jedes Bogens $AM = S$ zu der Linie OC, welche die Tangente BMC an M von der Abciſſen-Axe OX abſchneidet, konſtant und $= a$ iſt. *)

Es ſey $OP = x$, $PM = y$, ſo iſt die Gleichung der Tangente BMC, wenn $x_1$ und $y_1$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes derſelben vorſtellen, nach (IV. Th. d. S. Anhang pag. 42.) dieſe:

$$y_1 - y = \partial y_x \cdot (x_1 - x);$$

und OC iſt der Werth von $x_1$ für $y_1 = 0$, alſo iſt

$$OC = x - \frac{y}{\partial y_x};$$

während man nach (IV. Th. d. S. Anhang pag. 67.)

$$s = \int_{x \div \alpha} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$$

hat, ſobald nur $\alpha$ der Abſciſſen-Werth $OA_1$ des Punktes A iſt.

Die Aufgabe iſt daher angeſetzt in der Gleichung

---

*) Befindet ſich in A ein Hund, und in O ſein Herr; geht der Herr von O nach X, und läuft zu gleicher Zeit der Hund dem Herrn nach, ſo nämlich, daß er immer in der Richtung nach dem Herrn zu läuft, und daher mit jedem Schritt, den der Herr macht, ſeine Richtung ändert; Herr und Hund beziehlich von O und A zu gleicher Zeit auslaufen, daß beider Bewegungen gleichförmig (konſtant) ſind, und daß die Geſchwindigkeit des Hundes das afache der Geſchwindigkeit des Herrn iſt, ſo wird der Hund die hier geſuchte Kurve durchlaufen.

1) $$\int_{x\div\alpha}\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx = a\cdot\left(x-\frac{y}{\partial y_x}\right);$$

Um aber diese Gleichung, welche noch ein angezeigtes Integral enthält, in eine gewöhnliche Differenzialgleichung zu verwandeln, differenziire man sie nach allem x, und man erhält die Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, nämlich

2) $$\sqrt{1+\partial y_x^2} = a\cdot\frac{y\cdot\partial^2 y_x}{\partial y_x^2},$$ *)

welche nun integrirt werden muß.

Zu dem Ende betrachte man, weil diese Gleichung x selbst nicht enthält, y als den unabhängigen Veränderlichen, setze daher nach den (§. §. 58—60. d. III. Th. d. S.) $\frac{1}{\partial x_y}$ statt $\partial y_x$, und $-\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^2}$ statt $\partial^2 y_x$; und die Gleichung (2.) geht über in

3) $$\sqrt{1+\partial x_y^2} = -a\cdot y\cdot\partial^2 x_y.$$

Hernach setze man

4) $\partial x_y = v$, so daß $\partial^2 x_y = \partial v_y$

wird, und die Gleichung (3.) wird nun folgende:

---

*) Um ein angezeigtes Integral, wie z. B. hier

$$\int\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx,$$

zu eliminiren, muß man eigentlich dieses Integral einem neuen Veränderlichen u gleich setzen, also den Ausdruck unter dem Integralzeichen $= \partial u_x$ setzen; dann aber aus allen 2 Gleichungen,

1) $$u = a\cdot\left(x-\frac{y}{\partial y_x}\right)$$

und

2) $$\sqrt{1+\partial y_x^2} = \partial u_x,$$

jede Spur von u eliminiren, während dieses letztere allemal nach Anleitung des (§. 281. d. V. Th. d. S.) geschieht.

Danach müßte man die Gleichung (1.) ebenfalls nach allem x differenziiren, und dann aus allen 3 Gleichungen u und $\partial u_x$ fortschaffen. — Dann wird aber genau die obige Differenzialgleichung der 2ten Ordnung hervorgehen.

5) $$\sqrt{1+v^2} = -a \cdot y \cdot \partial v_y.$$

Dividirt man aber hier durch $y \cdot \sqrt{1+v^2}$, so ergiebt sich

6) $$\frac{1}{y} = -a \cdot \frac{\partial v_y}{\sqrt{1+v^2}};$$

und nimmt man hier links und rechts die Integrale nach allem y, so ergiebt sich nach (IV. Th. d. S. §. §. 165. 166.)

7) $$log\, y = -a \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \cdot dv = -a \cdot log\, C \cdot (v + \sqrt{1+v^2}),$$

wo C eine willkührliche Konstante ist, oder

8) $$(by)^{-\frac{1}{a}} = v + \sqrt{1+v^2} = \partial x_y + \sqrt{1+\partial x_y^2},$$

wenn $C^a = b$ gesetzt wird, so daß b die willkührliche Konstante ist. Nach dieser vollendeten ersten Integration, durch welche man zu einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung gelangt ist, muß diese letztere wiederum integrirt werden. Da aber diese Gleichung nicht x selbst enthält, so bewerkstelligt sich ihre Integration wiederum dadurch, daß man die Gleichung nach $\partial x_y$ algebraisch auflößt, und dann von dem dafür gefundenen Ausdrucke das Integral nach allem y nimmt, welches $= x$ ist. Man findet aber aus der Gleichung (8.) zunächst

9) $$\partial x_y = \tfrac{1}{2} \cdot \left[ (by)^{-\frac{1}{a}} - (by)^{\frac{1}{a}} \right];$$

folglich wird, wenn man links und rechts die Integrale nach allem y nimmt,

10) $$x + c = \tfrac{1}{2} a \cdot \left[ \frac{b^{-\frac{1}{a}} \cdot y^{-\frac{1}{a}+1}}{a-1} - \frac{b^{\frac{1}{a}} \cdot y^{\frac{1}{a}+1}}{a+1} \right],$$

wo c die zweite willkührliche Konstante ist.

Von diesen beiden willkührlichen Konstanten b und c bestimmt sich nun die eine c dadurch, daß der Punkt A gegeben ist, so daß dessen Koordinaten $\alpha$ und $\beta$, beziehlich statt x und y gesetzt, die Gleichung (10.) identisch machen müssen. — Die

Gleichung (10.) geht dadurch über in

11) $$x-\alpha = \tfrac{1}{2}a\cdot\left[\frac{b^{-\frac{1}{a}}\cdot\left(y^{-\frac{1}{a}+1}-\beta^{-\frac{1}{a}+1}\right)}{a-1}-\frac{b^{\frac{1}{a}}\cdot\left(y^{\frac{1}{a}+1}-\beta^{\frac{1}{a}+1}\right)}{a+1}\right].$$

Die andere Konstante b wird aber durch die Bedingung bestimmt, daß der Gleichung (1.) genügt werden muß, welche letztere auch so geschrieben werden kann, nämlich:

12) $$\int_{y\div\beta}\sqrt{1+\partial x_y^{\,2}}\cdot dy = a\cdot(x-y\cdot\partial x_y),$$

während die Gleichung (11.) mit der willkührlichen Konstante b dieser Gleichung (1.) oder (12.) noch nicht, sondern nur der Differenzialgleichung der 2ten Ordnung (2.) genügt, welche selbst erst aus der (1.) durch Differenziiren hervorgegangen ist.

Man darf also nur statt x und statt $\partial x_y$ ihre Werthe aus (11. u. 9.) in diese Gleichung (12.) substituiren, und es werden sich dann die x von selbst wegheben, und eine bloße Gleichung zwischen b, a und $\beta$ übrig bleiben, welche zur Bestimmung der Konstante b dient.

Es wird aber weniger Mühe kosten, die Konstante b mittelst zugezogener geometrischer Betrachtungen zu bestimmen. Da nämlich, wenn der Bogen Null ist, auch OC Null werden muß, weil sonst der Gleichung (1.) für diesen Werth von x nicht genügt wäre, so folgt aus der Gleichung (12.), daß der Ausdruck

$$x-y\cdot\partial x_y$$

Null werden muß, wenn statt x und y beziehlich $\alpha$ und $\beta$ gesetzt wird. Dies giebt die Gleichung

13) $$\alpha-\beta\cdot\left[(b\beta)^{-\frac{1}{a}}-(b\beta)^{+\frac{1}{a}}\right] = 0;$$

und löst man letztere nach b auf, so erhält man zunächst

14) $$(b\beta)^{\frac{1}{a}} = \frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta},$$

also

15) $$b = \frac{1}{\beta} \cdot \left( \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \right)^a .$$ *)

## Aufgabe 10.

Innerhalb der rechtwinklichen Axen OX und OY (Fig. 10.) liegt feiner Sand. Eine feste Linie AB von gegebener Länge a ist anfänglich in der Lage OD, bewegt sich aber dann so, daß ihre Endpunkte A und B fortwährend in den Axen OY und OX bleiben. Dadurch schiebt die Linie AB aus dem Winkel bey O den Sand dergestalt zurück, daß seine Grenze durch eine krumme Linie DF gebildet wird. Man soll die Gleichung dieser Kurve finden.

Erste Auflösung. Betrachten wir einen beliebigen Punkt M dieser Kurve, dessen Abscissenwerth $OP = x$, und dessen Ordinatenwerth $PM = y = y_x$ ist, so ist die Linie AB offenbar an diesem Punkte M eine Tangente, und die Gleichung dieser Tangente ist nach (IV. Th. d. S. Anhang pag. 42.)

1) $$y' - y = \partial y_x \cdot (x' - x),$$

wenn x' und y' die Koordinatenwerthe vorstellen eines beliebigen Punktes der Richtung AB. — Aus dieser Gleichung (1.) kann man nun die Längen der Linien OB, OA, also auch die Länge AB in x, y und $\partial y_x$ ausgedrückt finden, und da diese Länge AB gegeben und $= a$ ist, so hat man zwei Ausdrücke für eine und dieselbe Sache, und dies giebt den Ansatz der Aufgabe.

Weil aber OB der Werth von x' ist, der zu $y' = 0$ gehört, so liefert die Gleichung (1.) sogleich

2) $$-y = \partial y_x \cdot (OB - x) \quad \text{oder} \quad OB = \frac{x \cdot \partial y_x - y}{\partial y_x}.$$

Weil ferner OA der Werth von y' ist, der zu $x' = 0$ ge-

---

*) Dabei kann man noch bemerken, daß $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = OA$ ist, und daß, wenn man den Winkel $AOX = \varphi$ setzt, dann

$$\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} = \frac{-Cos\varphi \pm 1}{Sin\,\varphi} = \begin{matrix} + Tg \\ -Cotg \end{matrix} \frac{1}{2}\varphi$$

ist.

hört, so erhält man daher aus der Gleichung (1.) sogleich

3) $OA-y = \partial y_x \cdot (-x)$ oder $OA = y-x \cdot \partial y_x$.

Die Gleichung der gesuchten Kurve ist daher, nach dem Pythagorischen Lehrsatze,

$$(y-x \cdot \partial y_x)^2 + \left(\frac{x \cdot \partial y_x - y}{\partial y_x}\right)^2 = a^2$$

oder

4) $$(y-x \cdot \partial y_x)^2 \cdot (1+\partial y_x^2) = a^2 \cdot \partial y_x^2;$$

und diese Gleichung darf nun nur noch integrirt werden.

Wollte man diese Differenzialgleichung der ersten Ordnung auf die Form

$$M+N \cdot \partial y_x = 0$$

bringen, so müßte man sie nach $\partial y_x$ ordnen, so daß man erhielte

5) $y^2-2 \cdot xy \cdot \partial y_x+(x^2+y^2-a^2) \cdot \partial y_x^2-2 \cdot xy \cdot \partial y_x^3+x^2 \cdot \partial y_x^4=0$,

und diese in Bezug auf den Unbekannten $\partial y_x$ algebraische Gleichung vom 4ten Grade müßte dann aufgelößt werden. Man fühlt aber bald, daß man auf diesem Wege nicht gut vorwärts gehen könne. — Wollte man nun den für diesen Fall hingestellten (§. 355. d. VI. Th. d. S.) zu Hülfe nehmen, so sieht man auch nicht sogleich, wie einer der dort erwähnten Fälle Anwendung finden könne. — Versucht man aber die bereits in den (§.§. 265. 266. des V. Th. des S.) mitgetheilte Methode, und differenziirt man zu dem Behufe die Gleichung (5.), so erhält man sogleich

6) $$[-xy+(x^2+y^2-a^2) \cdot \partial y_x-3xy \cdot \partial y_x^2+2x^2 \cdot \partial y_x^3] \cdot \partial^2 y_x = 0,$$

d. h., wenn man den erstern Faktor außer Acht läßt, welcher vielleicht zu einem singulären Werthe führt,

7) $\partial^2 y_x = 0$, $\partial y_x = C$, $y_x = C \cdot x + C_1$;

und dies ist die Gleichung einer geraden Linie, in welcher die beiden eingehenden Konstanten C und $C_1$ noch bestimmt werden müssen. Weil aber die Ur-Gleichung in (7.) der Differenzialgleichung (4.) zu genügen hat, so setze man in letzterer $C \cdot x + C_1$ statt

y, so wie C statt $\partial y_x$, und man erhält

8) $$C_1^2 \cdot (1+C^2) = a^2 C^2,$$

wodurch die eine der Konstanten bestimmt wird. Die andere bleibt dann noch unbestimmt, und das allgemeine Integral der (4.) ist daher

$$y = C \cdot x + \frac{a \cdot C}{\sqrt{1+C^2}}.$$

Die hier gesuchte Linie ist aber offenbar eine krumme; also liefert dieser Faktor $\partial^2 y_x = 0$ der Gleichung (6.), keine Auflösung unserer Aufgabe.

Nimmt man nun den andern Faktor in (6.), nämlich

9) $$-xy+(x^2+y^2-a^2)\cdot\partial y_x-3xy\cdot\partial y_x^2+2x^2\cdot\partial y_x^3 = 0,$$

so ist diese Gleichung wieder eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung, welche mit der (5.) zu gleicher Zeit statt haben muß. Eliminirt man daher aus (9. und 5.) zunächst $\partial y_x$, so erhält man eine Gleichung bloß zwischen y und x, und genügt diese dann der gegebenen Differenzialgleichung (4. oder 5.), so hat man einen singulären Werth dieser letztern (vgl. V. Th. d. S. §. 270.), und dieser ist die Gleichung für die gesuchte Kurve.

Die ganze Rechnung wird aber viel bequemer, wenn man, statt die Gleichung (5.) zu differenziiren, um zu der (6.) zu gelangen, aus der Gleichung (4.) vorher links und rechts die Quadratwurzel nimmt, also die Gleichung

10) $$0 = -y+x\cdot\partial y_x+a\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}$$

sich verschafft, und diese nun differenziirt. Dadurch erhält man statt der (6.) jetzt

11) $$x+\frac{a}{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \text{oder} \quad (1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{a}{x},$$

und

12) $$\partial y_x = \frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Setzt man nun diese Werthe in die (10.), so ergiebt sich

$$0 = -y + x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} - a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}},$$

d. h.

13) $$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \text{ *)},$$

wo wir das (—) Zeichen weglassen, weil die $\frac{3}{2}$te Potenz doch das (+) und (—) Zeichen zugleich hat.

Und da dieser Werth von y wirklich der Differenzialgleichung genügt, ohne in dem allgemeinen Integrale (7.) enthalten zu seyn, so ist solcher ein singulärer Werth der Differenzialgleichung (4.), jedoch dasmal gerade derjenige Werth, welcher allein unsere Aufgabe lößt, während keiner der im allgemeinen Integrale (7.) steckenden Werthe von y den Bedingungen derselben Aufgabe entspricht.

Dieser singuläre Werth konnte nach (§. 270. d. V. Th. d. S.) auch aus dem allgemeinen Integrale (7. u. 8.), nämlich aus

14) $$y = C \cdot x + \frac{a \cdot C}{\sqrt{1 + C^2}}$$

gefunden werden, wenn man die Gleichung (14.) nach C allein differenziirt, also die Gleichung

15) $$0 = x + \frac{a}{(1 + C^2)^{\frac{3}{2}}}$$

bildet, und dann C aus (14. und 15.) eliminirt. Dies bestätigt

---

*) Man kann derselben Gleichung auch die Form

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

oder auch die Form

$$(y^{\frac{1}{3}})^2 + (x^{\frac{1}{3}})^2 = (a^{\frac{1}{3}})^2$$

geben. Diese Kurve hat daher auch die Eigenschaft, daß die Kubikwurzeln ihrer Koordinaten die Koordinaten einer Kreislinie sind, deren Radius $a^{\frac{1}{3}}$ oder $\sqrt[3]{a}$ ist.

Dieselbe Gleichung kann auch auf die Form

$$(y^2 + x^2 - a^2)^3 + 27a^2 \cdot x^2 \cdot y^2 = 0$$

gebracht werden, und giebt daher eine algebraische Kurve der 6ten Ordnung, welche 4 Zweige hat.

sich hier schon dadurch, daß die Gleichungen (14. und 15.) von denen (10. und 11.) durch gar nichts von einander verschieden sind, als daß hier immer C steht, wo dort $\partial y_x$.

Zweite Auflösung. Man kann auch die Aufgabe wie folgt behandeln. Weil die Kurve beschrieben wird, indem sich die gerade Linie bewegt, so kann jeder ihrer Punkte als der Durchschnittspunkt angesehen werden zweier nächst auf einander folgenden Lagen der Linie AB. Nun findet sich für die in (Fig. 10.) angedeutete Lage von AB, nach dem (IV. Th. d. S. Anhang Nr. 4.), die Gleichung

$$1) \quad 0 = -y + C \cdot x + \frac{a \cdot C_i}{\sqrt{1+C^2}}, \quad \text{oder} \quad f_C = 0,$$

wenn der ganze Ausdruck $-y+C\cdot x+\frac{a\cdot C}{\sqrt{1+C^2}}$ durch $f_C$ bezeichnet wird, wo C negativ ist und der trigonometrischen Tangente des stumpfen Winkels ABX gleich. Setzt man nun hier C+h statt C, und denkt man sich dabei h im Moment des Verschwindens, so hat man die Gleichung für die nächstfolgende Lage von AB, welche also durch

$$2) \quad f_{C+h} = 0 \quad \text{oder} \quad f_C + \partial f_C \cdot h + \partial^2 f_C \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots = 0$$

vorgestellt ist. Denkt man sich nun unter x und y in (1. u. in 2.) bloß die Koordinaten des Durchschnittspunktes M dieser beiden nächst auf einanderfolgenden Lagen von AB, so sind die x und die y in beiden Gleichungen (1. und 2.) dieselben, also auch die $f_C$ dieselben, so daß die Gleichung (2.), wegen $f_C = 0$, und wenn man durch h wegdividirt, und weil h der Null nächstanliegend gedacht werden muß, auf

$$3) \quad \partial f_C = 0, \quad \text{oder} \quad x + \frac{a}{(1+C^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

sich reduzirt. Eliminirt man daher aus beiden Gleichungen (1. und 3.) den Buchstaben C, so erhält man eine Gleichung zwischen den Koordinatenwerthen x und y dieses Durchschnitts-

punktes M, welche kein C mehr enthält, welche also dieselbe bleibt, wenn auch dem C alle möglichen Werthe beigelegt werden. Diese zuletzt erhaltene Gleichung findet also für alle diese Durchschnittspunkte aller dieser beiden nächst auf einander folgenden Lagen von AB, d. h. für alle Punkte der gesuchten Kurve statt; sie ist mithin die Gleichung für die gesuchte Kurve.

Und da die hiesigen Gleichungen (1. und 3.) von den vorhergehenden Gleichungen (14. und 15.) gar nicht verschieden sind, so sieht man auch ein, daß genau dasselbe Endresultat hervorgehen müsse, wie solches in der erstern Auflösung sich ergeben hat.

Bemerkg. I. Diese Aufgabe führt uns zu einer allgemeinen Bemerkung. — Denkt man sich eine beliebige Gleichung zwischen x und y und c für eine beliebige gerade oder krumme Linie, nämlich

$$1) \qquad f_{x,y,c} = 0 \quad \text{oder} \quad f_c = 0;$$

und denkt man sich in dieser Gleichung dem c nach und nach alle stetig auf einander folgende Werthe gegeben, so entstehen unendlich viele, sich sehr wenig von einander unterscheidende gerade oder krumme Linien, welche als stetig auf einander folgend angesehen werden können. Die Durchschnittspunkte je zweier dieser nächst auf einander folgenden geraden oder krummen Linien bilden nun auch wieder eine Kurve, und die Gleichung dieser Kurve wird erhalten (wie dies aus dem Verfahren der letztern Auflösung unserer vorhergehenden Aufgabe, welches hier wiederum unverändert statt finden muß, offenbar hervorgeht), wenn man aus

$$1) \qquad f_{x,y,c} = 0 \qquad \text{und} \qquad 2) \qquad \partial f_c = 0$$

diesen Buchstaben c eliminirt, d. h. wenn man c aus (2.) in x und y ausgedrückt findet, nämlich

$$3) \qquad c = \psi_{x,y},$$

und diesen Werth statt c in die (1.) substituirt, so daß

$$4) \qquad f_{x,y,\psi} = 0$$

sich ergiebt.

II. Die Lage einer geradlinigen Tangente irgend einer Kurve $\varphi_{x,y} = 0$ hängt von dem Werthe $\partial y_x$ allein ab (nach IV. Th. d. S. Anhang pag. 42.), wie er sich aus der Gleichung $\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y_x = 0$ ergiebt. Die Lage der geradlinigen Tangente an die gegebene (gerade oder) krumme Linie

$$f_{x,y,c} = 0$$

hängt also von dem Werthe von $\partial y_x$ ab, wie solcher aus der Gleichung

5) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0$$

hervorgeht. — Die Lage der geradlinigen Tangente an die gefundene Kurve

$$f_{x,y,\psi} = 0$$

hängt aber eben so von dem $\partial y_x$ ab, wie solches aus

6) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x + \partial f_\psi \cdot (\partial\psi_x + \partial\psi_y \cdot \partial y_x) = 0$$

hervorgeht. Weil aber nach (2.) $\partial f_\psi = 0$ ist, so unterscheidet sich die Gleichung (6.) von der Gleichung (5.) in nichts, als daß in (6.) $\psi$ steht, wo in (5.) c zu finden ist. Also hat die erzeugte Kurve (4.) an jedem ihrer Punkte mit derjenigen der erzeugenden Kurve (1.), die durch denselben Punkt hindurchgeht, eine und dieselbe geradlinige Tangente, so daß die erzeugte Kurve (4.) alle erzeugenden Kurven (1.) zugleich berührt. — Man nennt sie deshalb gewöhnlich die, alle die erzeugenden Kurven enveloppirende Kurve, auch die Umfassungskurve*) oder die Einhüllungskurve.

---

*) In der Aufgabe (10.) ist die gefundene Kurve DME die Umfassungskurve für alle die geraden Linien wie AB, welche durch die Gleichung

$$0 = -y + C \cdot x + \frac{a \cdot C}{\sqrt{1 + C^2}}$$

gegeben sind, und welche aus dieser Gleichung hervorgehen, wenn man dem C d. h. der *tg* ABX, d. h. dem Winkel ABX nach und nach alle stetig neben einander liegenden Werthe beilegt. Die Kurve DMF ist also die Umfassungskurve aller der geraden Linien von der konstanten Länge a, deren Endpunkte beziehlich in den Axen OX und OY liegen.

III. Sucht man nun die erzeugte Kurve vermöge ihrer letztern Eigenschaft, d. h. stellt man die Aufgabe so: „die Kurve zu finden, welche die aus $f_{x,y,c} = 0$ durch die verschiedenen Werthe von c hervorgehenden geraden oder krummen Linien alle zugleich berührt," so kann die Behandlung zu einer Differenzialgleichung führen, deren allgemeines Integral aber die gegebene Gleichung $f_{x,y,c} = 0$ selbst seyn muß, so daß dieses Integral nicht, sondern der aus $f_{x,y,c} = 0$ und $\partial f_c = 0$ hervorgehende singuläre Werth die Auflösung giebt. *)

Im Allgemeinen führt aber die Aufgabe, auch wenn man sie aus diesem letztern Gesichtspunkte giebt, doch immer sogleich zu dem Resultate, daß die gesuchte Kurve dadurch erhalten wird, daß man aus

$$f_{x,y,c} = 0 \quad \text{und} \quad \partial f_c = 0$$

die Konstante c eliminirt, sobald man sie nur so behandelt, wie hier folgt. Da nämlich die gesuchte Kurve die gegebene Kurve

$$f_{x,y,c} = 0$$

berühren soll, so müssen ihr y und ihr $\partial y_x$, für einen bestimmten Abcissenwerth, der, in so ferne er von c selbst abhängt, durch $x_c$ bezeichnet seyn mag, genau dieselben seyn, wie solche aus

$$1) \quad f = 0 \quad \text{und} \quad 2) \quad \partial f_{(x)} = f'_{x,y,\partial y,c} = 0$$

hervorgehen, wenn unter $\partial f_{(x)}$ oder $f'_{x,y,\partial y,c}$ der Ausdruck $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x$ verstanden wird. Weil aber dieselbe gesuchte Kurve auch die durch

$$f_{x,y,c+h} = 0$$

ausgedrückte nächstfolgende Kurve berühren soll, und zwar an einem Punkte, dessen Abcissenwerth $x_{c+h}$ ist, so müssen ihre zu diesem Werthe $x_{c+h}$ von x, gehörigen y und $\partial y_x$ wiederum dieselben seyn, wie solche auch aus den Gleichungen (1. u. 2.)

---

*) Auf diese letztere Weise wurde nun unsre vorhergehende Aufgabe (10.) in ihrer ersten Auflösung behandelt; während die zweite Auflösung derselben Aufgabe dem Gange entspricht, der hier oben in (I.) zuerst erwähnt worden ist.

hervorgehen, wenn man überall $c+h$ statt c, also auch

$$x_{c+h} \text{ d. h. } x_c + \partial x_c \cdot h + \cdots \text{ statt } x,$$

und deshalb auch

$$[y_x]_{x_{c+h}} \text{ d. h. } y + \delta y \cdot h + \cdots \text{ statt } y$$

schreibt, wo $\delta y = \partial y_x \cdot \partial x_c$ ist. — Diese zwei letztern Gleichungen, nach Potenzen von h entwickelt gedacht, führen aber zu folgenden beiden Gleichungen, nämlich zu

$$3) \quad \partial f_{(c)} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial f_{(x)} \cdot \partial x_c + \partial f_c = 0$$

und

$$4) \quad \partial f'_{(c)} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial f'_{(x)} \cdot \partial x_c + \partial f'_c = 0, \; *)$$

während sich die (3.) wegen der (2.) auch noch bloß auf

$$5) \quad \partial f_c = 0$$

zurückzieht. Es finden also zwischen den Koordinaten x und y und den Ableitungen $\partial y_x$ und $\partial^2 y_x$ die 4 Gleichungen (1. 2. 4. und 5.) statt, von denen jedoch die (1. und 5.) bloß x und y enthalten, so daß diese unmittelbar die verlangte Gleichung zwischen x und y liefern, wenn man c aus ihnen eliminirt.

Nimmt man aber statt der Gleichungen (1. und 5.) etwa die (2.), oder diejenige, welche aus (1. u. 2.) hervorgeht, wenn man c aus beiden eliminirt, so hat man nun eine Differenzialgleichung der Kurve, welche, integrirt, die (1.) wieder giebt, und deren singulärer Werth die Aufgabe ganz allein wirklich löset.

Endlich fügen wir noch hinzu, daß die völlige Uebereinstim-

---

*) Die Gleichungen (1. und 2.) lassen sich so schreiben:

$$1') \quad f_{(c)} = 0 \quad \text{und} \quad 2') \quad f'_{(c)} = 0,$$

indem man $x_c$ unter x versteht. Die jetzigen werden daher

$$3') \quad f_{(c+h)} = 0 \quad \text{und} \quad 4') \quad f'_{(c+h)} = 0.$$

Zieht man nun (1′.) von (3′.) ab, dividirt man die Differenz durch h, so erhält man, weil h im Moment des Verschwindens ist, die obige Gleichung (3.). — Wird dagegen (2′.) von (4′.) subtrahirt, die Differenz durch h dividirt, so erhält man, weil h im Moment des Verschwindens ist, die obige Gleichung (4.).

mung der Resultate, man mag die Aufgabe unter dem einen Gesichtspunkte (in I.) oder unter dem anderen (in III.) ansehen, zu gleicher Zeit die Identität beider Ansichten außer Zweifel stellt, im Falle ein solcher Zweifel aufgeworfen werden dürfte.

Betrachten wir nun noch einige andere besondere Fälle der eben besprochenen allgemeinen Aufgabe, von welcher die Aufgabe (10.) ebenfalls nur ein besonderer Fall ist.

## Aufgabe 11.

Denken wir uns die Gleichung einer Kreislinie

$$1) \qquad (x-c)^2+(y-\varphi_c)^2 = a^2,$$

in welcher der Radius a immer derselbe bleiben soll, während der Mittelpunkt, dessen Koordinaten c und $\varphi_c$ sind, fortwährend fortrückt, in so ferne c fortwährend sich ändert; so entspricht diese Voraussetzung einer Kreislinie, welche ihrer Größe nach immer dieselbe bleibt, deren Mittelpunkt aber auf einer durch die Gleichung

$$y' = \varphi_{x'}$$

gegebenen Kurve sich fortbewegt. Soll also die, alle diese Kreise berührende oder enveloppirende Kurve gesucht werden, so darf man nur den singulären Werth einer Differenzialgleichung suchen, deren allgemeines Integral die gegebene Gleichung (1.) selbst wie der ist, wo c die willkührliche Konstante vorstellt.

Differenziirt man zu dem Ende die Gleichung (1.) nach allem c, so erhält man

$$2) \qquad (x-c)+(y-\varphi_c)\cdot\partial\varphi_c = 0;$$

und eliminirt man nun c aus beiden Gleichungen (1. und 2.), so hat man die Gleichung für die gesuchte enveloppirende Kurve, d. h. für die Kurve, welche alle diese Kreise berührt, und welche auch als durch die successiven Durchschnittspunkte je zweier nächst auf einander folgenden Lagen dieses Kreises gebildet angesehen werden kann.

Soll sich z. B. der Mittelpunkt des Kreises auf einer durch die Gleichung

$$p \cdot y' - q \cdot x'^2 = 0 \quad \text{oder} \quad y' = \frac{q}{p} \cdot x'^2$$

gegebenen Parabel bewegen, so ist jetzt

$$\varphi_c = \frac{q}{p} \cdot c^2, \quad \text{also} \quad \partial\varphi_c = 2\frac{q}{p} \cdot c.$$

Die beiden Gleichungen (1. u. 2.) werden jetzt

$$\left\{\begin{aligned} (x-c)^2 + (y - \tfrac{q}{p} \cdot c^2)^2 &= a^2 \\ (x-c) + 2(y - \tfrac{q}{p} \cdot c^2) \cdot \tfrac{q}{p} c &= 0, \end{aligned}\right\}$$

und die Gleichung der gesuchten Kurve erhält man daher, wenn aus diesen beiden letztern Gleichungen c eliminirt wird, während einzelne Punkte derselben Kurve auch dadurch gefunden werden können, daß man dem c allerlei Werthe giebt, und aus den beiden Gleichungen die zusammengehörigen Werthe von x und y jedesmal dazu sucht.

## Aufgabe 12.

Nehmen wir wieder die Gleichung für die Kreislinie, aber jetzt statt des, für alle auf einander folgenden Kreislinien konstant gebliebenen, Radius a, einen veränderlichen Radius $\psi_c$, also die Gleichung

1) $$(x-c)^2 + (y-\varphi_c) = \psi_c{}^2;$$

so hat man für stetig auf einander folgende Werthe von c eine Reihe stetig auf einander folgender Kreislinien, deren Radien aber dabei selber nach einem gegebenen Gesetze $\psi_c$ sich verändern; und man kann nun sagen, daß ein Kreis mit seinem Mittelpunkte sich auf der gegebenen Kurve

$$y' = \varphi_{x'}$$

fortbewege, während zu gleicher Zeit sein Radius nach einem gegebenen Gesetze $\psi_c$ sich verändert. Man soll nun die Kurve finden, welche alle diese Kreise zugleich berührt, oder welche durch die successiven Durchschnittspunkte je zweier nächst aufeinander folgenden dieser Kreise gebildet wird.

Die gesuchte Gleichung geht nun nach den Bemerkungen (I.—III.) zur Aufgabe (10.) unmittelbar aus den beiden Gleichungen

1) $(x-c)^2+(y-\varphi_c)^2 = \psi_c^2$,

und deren Differenziale nach allem c,

2) $(x-c)+(y-\varphi_c)\cdot\partial\varphi_c = -\psi_c\cdot\partial\psi_c$

hervor, wenn man c aus beiden eliminirt.

Denkt man sich z. B. einen Kreis mit seinem Mittelpunkte auf der gegebenen geraden Linie

$$y' = a\cdot x'+b$$

sich fortbewegend, dessen Radius aber während seiner Bewegung im Verhältniß der Abcisse des Mittelpunktes wächst, so daß etwa

$$\psi_c = m\cdot c, \text{ also } \partial\psi_c = m$$

ist, so hat man hier

$$\varphi_c = a\cdot c+b, \text{ also } \partial\varphi_c = a;$$

und die beiden Gleichungen (1. u. 2.) werden daher jetzt

$$(x-c)^2+(y-b-a\cdot c)^2 = m^2\cdot c^2$$

und

$$(x-c)+(y-b-a\cdot c)\cdot a = -m^2\cdot c.$$

Aus der 2ten findet man

$$c = \frac{x+a\cdot(y-b)}{a^2-m^2+1},$$

und dieser Werth statt c in die erstere Gleichung gesetzt, giebt

$$[(a^2-m^2)x-a\cdot(y-b)]^2+[(1-m^2)(y-b)-ax]^2 = m^2\cdot[x+a(y-b)]^2.$$

Diese algebraische Gleichung der 2ten Ordnung (welche bekanntlich allemal einen Kegelschnitt repräsentirt) ist also die Gleichung der gesuchten Kurve.

Anmerkung. In dieser Aufgabe (12.) stecken übrigens wiederum eine unendlich große Anzahl besonderer Aufgaben, namentlich aber auch die Aufgaben: 1) aus einer gegebenen Kurve ihre Evolvende (Developpante) zu finden; 2) alle Rouletten oder Radlinien zu finden, d. h. alle Kurven, welche irgend ein mit einer gegebenen Kurve in derselben Ebene fest verbundener Punkt beschreibt, wenn solche auf einer andern gegebenen Kurve dergestalt abgerollt wird, daß immer gleiche Bogen sich auf einander abrollen. *)

*) Zu den Rouletten oder Radlinien gehören auch wiederum die

I. Denkt man sich nämlich, daß der Radius $\psi_c$ dieses beweglichen Kreises

$$(x-c)^2+(y-\varphi_c) = \psi_c^2$$

immer um die Länge des Weges größer werde, den der Mittelpunkt desselben auf der gegebenen Kurve

$$y' = \varphi_{x'}$$

zurücklegt, so hat man (nach §. §. 204. 205. d. V. Th. d. S.)

$$\psi_c = \int_c \sqrt{1+\partial y'^2_{x'}} \cdot dx' + r = \int \sqrt{1+\partial \varphi_c^2} \cdot dc + r,$$

wo r eine Konstante ist, welche von der Länge des Radius an irgend einer Stelle des beweglichen Kreises abhängt; also ist

$$\partial \psi_c = \sqrt{1+\partial \varphi_c^2}.$$

Setzt man daher diese Werthe statt $\psi_c$ und $\partial\psi_c$ in die Gleichungen (1. und 2.) der Aufgabe (12.), d. h. in die Gleichungen

1) $$(x-c)^2+(y-\varphi_c)^2 = \psi_c^2$$

und 2) $$x-c+(y-\varphi_c)\cdot\partial\varphi_c = -\psi_c\cdot\partial\psi_c,$$

so erhält man, nachdem aus beiden Gleichungen c eliminirt ist, die jetzt gesuchte, alle diese Kreise umfassende, Kurve, welche jedoch, den (im IV. Th. d. S. Anhang p. 78. seqq.) gegebenen Begriffen zufolge, keine andere als die Evolvende der durch die Gleichung

$$y' = \varphi_{x'}$$

gegebenen Kurve seyn kann. Weil aber $\psi_c$ noch die Konstante r in sich aufgenommen hat, so hat man zu gleicher Zeit alle Evolvenden, welche eine und dieselbe gegebene Kurve (als Evolute) haben kann.

II. Ist (Fig. 12.) AMR eine fest liegende Kurve, ist dagegen PMQ eine andere, welche auf der erstern dergestalt ab-

---

Cykloiden, sowohl die gemeinen als auch die verlängerten und verkürzten, wo die abrollende Kurve ein Kreis, die Kurve aber, auf welcher derselbe abgerollt wird, eine gerade Linie ist.

gerollt wird, daß anfänglich P in A ist, dann aber für jeden gemeinschaftlichen Punkt M, der Bogen AM dem Bogen PM gleich wird, so beschreibt der Punkt P die Roulette APS. Diese Roulette APS berührt in P die Kreislinie, welche mit dem, der Sehne PM gleichen, Radius aus dem Mittelpunkte M beschrieben wird. Die Roulette APS ist also die Kurve, welche ein Kreis beschreibt, der sich mit seinem Mittelpunkte auf der Kurve AM bewegt, dessen Radius aber während der Bewegung selber sich ändert und an jeder Stelle die Sehne ist, welche zu dem, dem Bogen AM gleichen, Bogen PM der Kurve PMQ gehört.

Ist also

1) $$y' = \varphi_{x'}$$

die Gleichung der gegebenen Kurve AMR, und

2) $$y'' = F_{x''}$$

die Gleichung der gegebenen Kurve PMQ in ihrer anfänglichen Lage AM''Q'', so ist, wenn man

$$\text{Bog. } AM'' = \text{Bog. } AM$$

sich denkt, und die Koordinaten-Werthe dieses Punktes M'' beziehlich unter x'' und y'', so wie die Koordinaten-Werthe des Punktes M unter x' und y' versteht, und wenn ferner a und b die Koordinaten-Werthe des Punktes A sind, x'' gegeben und zu finden durch die Gleichung

3) $$\int_{x''\div a} \sqrt{1+\partial F_{x''}} \cdot dx'' = \int_{x'\div a} \sqrt{1+\partial \varphi_{x'}} \cdot dx',$$

ausgedrückt in x' und a. Aus dem gefundenen x'' findet sich y'' dazu mittelst der Gleichung (2.), und aus den nun gefundenen Koordinaten-Werthen findet sich nach (IV. Th. d. S. Anhang N. 21.)

4) Sehne PM = Sehne AM'' = $\sqrt{(x''-a)^2+(y''-b)^2}$,

wiederum bloß in x' und a und b ausgedrückt. Dieser letztere Ausdruck, wenn c statt x' gesetzt wird, ist dasmal der Radius $\psi_c$

des Kreises in der Aufgabe (12.), während $\varphi_c$ jetzt das ist, was aus dem hiesigen $\varphi_{x'}$ wird, sobald man c statt x' substituirt; eben weil in der Aufgabe (12.) c und $\varphi_c$ die Koordinaten des Mittelpunktes M des beweglichen Kreises vorstellen.

Denkt man sich statt des Punktes P in der Kurve PMQ einen andern Punkt P', welcher in der anfänglichen Lage der Kurve PMQ in A' war, und welcher gegen die Kurve PMQ selbst (z. B. gegen die Tangente in P) eine gegebene feste Lage hat, so wird dieser Punkt P' ebenfalls eine Roulette A'M'P' beschreiben, und dabei wird die Linie MP' = M''A' der Radius des beweglichen Kreises seyn, und aus den Koordinatenwerthen der Punkte A' und M'' (während Bog AM'' = Bog AM genommen ist) gefunden werden müssen. *)

## Aufgabe 13.

Liegt links von der unbegrenzten geraden Linie AB (Fig. 11.) wiederum feiner Sand, welchen diese Linie AB zurückschiebt, indem sie nach und nach die Lagen A'B', A''B'', ꝛc. ꝛc. durch stetige Bewegung einnimmt; und ist dabei das Gesetz dieser Bewegung dadurch gegeben, daß diese AB, unbegrenzt auf jeder Seite wie sie ist, auf einer gegebenen Kurve VUT, während sie selbige durchläuft, in jedem Punkte der letztern senkrecht steht, so ist die durch den Sand gebildete Kurve offenbar nichts anders, als die Evolute der gegebenen Kurve AMS.

Soll daher diese Evolute aus diesem Gesichtspunkte gefunden werden, so hat man, wenn

$$y' = \varphi_{x'}$$

die Gleichung der Kurve VUT ist, als Gleichung der sich bewegenden geraden Linie AB, wenn man sie an der Stelle betrachtet, wo sie die Kurve in dem Punkte trifft, dessen Abciſſe c

---

*) Nimmt man statt der Kurve PMQ eine gerade Linie, so ist die durch irgend einen Punkt derselben beschriebene Roulette allemal zu gleicher Zeit die Evolvende der gegebenen Kurve AMR. — So sieht man also die Gleichung einer Evolvende zum dritten Male hervorgehen.

und Ordinate $\varphi_c$ ist, nach (IV. Th. d. S. Anhang p. 42.) offenbar diese:

$$1) \quad y - \varphi_c = -\frac{1}{\partial \varphi_c} \cdot (x - c),$$

so bald nur x und y die Koordinaten-Werthe dieser Geraden AB sind.

Die Gleichung der durch die Durchschnittspunkte aller der Geraden, welche aus der Gleichung (1.) dadurch hervorgehen, daß man dem c nach und nach alle stetig neben einander liegenden Werthe giebt, gebildeten Umfassungs-Kurve (Enveloppante) wird daher gefunden, wenn man die (1.) nach allem c differenziirt, so daß

$$-\partial \varphi_c = \frac{1}{\partial \varphi_c} + \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial \varphi_c^2} \cdot (x - c)$$

oder

$$2) \quad 0 = \partial \varphi_c \cdot (1 + \partial \varphi_c^2) + \partial^2 \varphi_c \cdot (x - c)$$

hervorgeht, und dann aus den Gleichungen (1. u. 2.) c selbst eliminirt.

Diese Umfassungskurve ist aber dasmal genau die Evolute (die Mittelpunktskurve der N. 56. des Anhanges im IV. Th. d. S.), *) der gegebenen Kurve VUT. — Und so sieht man das (im Anhange zum IV. Th. d. S. p. 81. zu Ende) angedeutete Verfahren durchgeführt.

Schluß-Anmerkung. Wir überheben uns aber der Aufzählung und Ausführung weiterer Aufgaben, in denen Kurven gesucht werden, welche durch stetige Bewegung anderer Linien ent-

---

*) Was dort durch b und a vorgestellt ist, ist hier y und x; und was dort y und x bedeuten, ist hier durch $\varphi_c$ und c vorgestellt.

In der Gleichung (2.) dahier kann man statt (x—c) setzen seinen Werth aus (1.), nämlich $\partial \varphi_c \cdot (\varphi_c - y)$, und die Gleichung (2.) geht dann über in

$$1 + \partial \varphi_c^2 + \partial^2 \varphi_c \cdot (\varphi_c - y) = 0,$$

wie solche dort zu finden ist.

stehen, und welche als durch die successiven Durchschnittspunkte je zweier nächst auf einander folgenden Lagen (Stellungen) der bewegten Linie erzeugt, angesehen werden können, oder auch, welche die sich bewegende Linie in jeder ihrer Lagen (Stellungen) an einem Punkte berührt, welche daher Umfassungs- oder Einhüllungskurven (Enveloppantes) genannt werden; — weil ihre Theorie in den Bemerkungen (I.—III.) zur Aufgabe (10.) ganz vollständig ausgesprochen ist; weil sie, aus diesem Gesichtspunkte behandelt, zu keiner Differenzialgleichung führen, welche erst integrirt werden müßte, weil im Gegentheil ihre Gleichung erhalten wird, wenn man c aus

$$f_c = 0 \quad \text{und} \quad \partial f_c = 0$$

eliminirt, unter der Voraussetzung, daß $f = 0$ die Gleichung der sich bewegenden Linie, und daß die stetige Aenderung von c die Ursache der Bewegung ist; endlich weil, auch wenn sie, aus anderen Gesichtspunkten, nämlich aus dem der Tangenten, behandelt, zu Differenzialgleichungen führen, die Lösung dieser Aufgaben doch nicht von der Integration dieser Differenzialgleichungen, sondern nur von deren singulären Werthen abhängt, während dieser Anhang uns vorzüglich Gelegenheit geben sollte, gegebene totale Differenzialgleichungen zu integriren, und so das Integriren in der gewöhnlichen Praxis näher kennen zu lernen. — Diesen letztern Zweck zu erreichen, dazu wird uns aber auch der nun folgende zweite Anhang noch Gelegenheit geben.

# Zweiter Anhang.

## Beispielsammlung
zur
## Lehre vom Größten und Kleinsten.

Weil die hier folgende Sammlung von Uebungsbeispielen aus der Lehre vom Größten und Kleinsten auch zu der vor 8 Jahren erschienenen

„Lehre vom Größten und Kleinsten. Berlin, bei Riemann „(jetzt Jonas) 1825“

gehören soll, so ist bei jedem einzelnen Beispiele auch allemal der (§.) jenes Werkes angemerkt, an welchem dieses Beispiel gerade sich anschließt.

# Zweiter Anhang.

## Uebungs-Beispiele zur Lehre vom Größten und Kleinsten.

### Aufgabe 1.

(Zu §. 44. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Man soll die Kurve finden, welche durch einen gegebenen Punkt $(\alpha, \beta)$ *) hindurchgeht, und welche dabei an jedem ihrer Punkte M, dessen Abcisse OP durch x vorgestellt seyn mag (Fig. 1.), die Eigenschaft hat, daß die durch diesen Punkt M hindurchgehende und von zweien, zu den Abcissen $OS_1 = a$ und $OT_1 = b$ gehörigen Ordinaten-Richtungen $SS_1$ und $TT_1$ begrenzte Tangente SMT kleiner ist, als die zu derselben Abscisse $OP = x$ gehörige und eben so begrenzte Tangente einer jeden andern nächstanliegenden Nachbarkurve, welche übrigens durch denselben gegebenen Punkt $(\alpha, \beta)$ hindurchgeht.

Auflösung. Ist hier $y = y_x$ die Ordinate MP der gesuchten Kurve, so drückt, indem wir wie immer die Bezeichnung des (11ten Kap. d. V. Th. d. S.) gebrauchen,

$$y_x \quad \text{d. h.} \quad y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots,$$

*) Unter einem Punkte $(\alpha, \beta)$ verstehen wir hier allemal einen solchen, dessen Abcisse $\alpha$ und dessen Ordinate $\beta$ ist. — Dabei werden hier durchaus auf einander senkrechte Koordinaten-Axen gedacht.

wenn $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. als ganz beliebige Funktionen von x gedacht sind, $\varkappa$ aber im Moment des Verschwindens, die zu derselben Abciſſe x gehörige Ordinate einer jeden der nächsten Nachbarkurven aus; und es sind diese $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. nur der einzigen Bedingung unterworfen, daß für $x = \alpha$, jedesmal

$$y = y_\varkappa = \beta, \quad \text{also} \quad \delta y = \delta^2 y = \text{ꝛc. ꝛc.} = 0$$

werde, d. h. daß $\delta y_\alpha = \delta^2 y_\alpha = \text{ꝛc.} = 0$ *) ist.

Diese Bedingung hat keinen Einfluß auf die Form der Funktionen $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc., sondern sie kann bei jeder Form für jedes x durch die gehörige Annahme der Koeffizienten erfüllt werden.

Nun wird nach (Th. IV. Anhang pag. 66.) die Länge V der Tangente SMT gefunden, nämlich

$$1) \quad V = (b-a)\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2} = (b-a)\cdot\sqrt{1+y_1^2},$$

wenn, wie hier gewöhnlich, die Ableitung $\partial y_x$ durch $y_1$ bezeichnet wird; demnach ist die Länge $V_\varkappa$ derselben Tangente für die nächsten Nachbarkurven folgende, nämlich

$$2) \quad V_\varkappa = (b-a)\cdot\sqrt{1+\partial (y_\varkappa)_x^2};$$

und deshalb ist nach dem (11ten Kap. d. V. Th. d. S.)

$$3) \quad \delta V = \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \partial \delta y = (b-a)\cdot \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} \cdot \partial \delta y,$$

in so ferne dasmal $\partial V_y = 0$ ist. Weil nun, im Falle V gegen $V_\varkappa$ ein Maximum oder Minimum seyn soll, $\delta V = 0$ werden muß, so bekommt man die Gleichung

$$4) \quad \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} = 0, \quad \text{d. h.} \quad y_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \partial y_x = 0;$$

---

*) Der Bequemlichkeit wegen bezeichnen wir hier allemal durch $\delta y_\alpha$, $\delta^2 y_\alpha$, ꝛc. beziehlich das, was nach (§. 204. d. V. Th. d. S.) durch $[(\delta y)_x]_\alpha$, $[(\delta^2 y_x)]_\alpha$, ꝛc. bezeichnet werden soll, d.h. das, was aus $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc. als Funktionen von x hervorgeht, wenn $\alpha$ statt x gedacht wird.

demnach, sobald man integrirt,

$$5) \qquad y = c,$$

wo c eine willkührliche Konstante ist. Diese Gleichung (5.) drückt aber eine mit der Abciſſen-Axe OX parallele gerade Linie aus. Damit sie noch durch den Punkt $(\alpha, \beta)$ gehe, muß für $x = \alpha$, die Ordinate $y = c = \beta$ werden; also ist die Gleichung der gesuchten Kurve

$$(\odot)\ldots \qquad y = \beta.$$

Diese Linie löst die Aufgabe, in so ferne sie selbst ihre Tangente ist; auch fällt dabei von selbst in die Augen, daß diese Tangente ein Minimum und kein Maximum ist. — Das letztere geht jedoch auch aus der Betrachtung von $\delta^2 V$ hervor. Man hat nämlich

$$\delta^2 V = \partial^2 V_{y_1} \cdot \partial\delta y^2 = (b-a) \cdot \frac{1}{(1+y_1^2)\cdot\sqrt{1+y_1^2}} \cdot \partial\delta y^2,$$

wo die Wurzel, wie hier immer, ihren positiven Werth vorstellen muß. *)

Da nun $\partial\delta y^2$ allemal positiv ist, so wird $\delta^2 V$ für die gefundene Funktion y, welche $y_1 = 0$ macht, weil dann

$$\delta^2 V = (b-a)\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \partial\delta y^2$$

---

*) Da es weder positive noch negative Größen giebt, so ist auch jede Linie eine absolute, welche allemal durch eine absolute (abstrakte) Zahl ausgedrückt werden kann. Da nun die Linie, welche das Minimum werden soll, durch

$$(b-a)\cdot\sqrt{1+y_1^2}$$

ausgedrückt ist in Zahl, so muß dieser Ausdruck eine absolute Zahl vorstellen. Da ferner b—a nicht negativ ist, so kann auch $\sqrt{1+y_1^2}$ in V nicht ihren negativen Werth vorstellen. Und weil endlich in $U = \sqrt{1+y_1^2}$ und $\partial U_{y_1} = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}$ die $\sqrt{1+y_1^2}$ allemal einen und denselben ihrer Wurzelwerthe vorstellen muß, so ist diese letztere Behauptung gerechtfertigt.

wird, und $\sqrt{1}$ ihren positiven Werth bedeutet *), offenbar positiv, also $V_x - V$ positiv, demnach V das Minimum.

Noch ist zu bemerken, daß man aus der Rechnung den konstanten Faktor hätte weglassen können, da $C \cdot V$ gegen $C \cdot V_x$ ein Maximum oder Minimum ist, so oft V gegen $V_x$ es ist, sobald C nur konstant und positiv bleibt.

Anmerkg. Der Anfänger kann fragen, warum die zur Abcisse x gehörige Ordinate der Nachbarkurven gerade durch die unendliche Reihe

$$y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots$$

ausgedrückt werden soll, wenn y die zu derselben Abscisse x gehörige Ordinate der gesuchten Kurve bedeutet? — Darauf läßt sich antworten:

Die an der gesuchten Kurve nächst anliegenden Nachbarkurven liegen nicht an einer einzigen Stelle einander nächst an, sondern die zu den verschiedenen Werthen von x gehörigen Punkte der gesuchten Kurve und ihrer Nachbarkurven (mit denen die gesuchte verglichen wird) sollen alle beziehlich einander nächst anliegend seyn. Die zur Abscisse x gehörige Ordinate der Nachbarkurven muß also außer x noch einen Veränderlichen $\varkappa$ in sich aufnehmen, und muß aus x und $\varkappa$ so zusammengesetzt seyn, daß sie, wenn $\varkappa$ sehr klein und immer kleiner wird, der Ordinate y der gesuchten Kurve sehr nahe und immer näher rückt; damit sie die nächstanliegenden Nachbarkurven vorstellt, sobald $\varkappa$ im Moment des Verschwindens gedacht wird; sie muß also für $\varkappa = 0$ mit der Ordinate y der gesuchten Kurve zusammenfallen.

---

*) Hier wird wichtig, was wir im (II. Th. d. S. §. §. 680. 681.) über die zusammengehörigen Werthe der Potenzen bemerken mußten, und worauf wir im (III. Th. d. S. §. 7.) hinsichtlich der zusammengehörigen Werthe von $f_x$ und $\partial f_x$, auf's neue hinzudeuten verpflichtet gewesen sind.

Damit nun aber diese Funktion von x und $\varkappa$, welche die zu x gehörige Ordinate der Nachbarkurven vorstellt, auch alle möglichen nächsten Nachbarkurven in sich begreife, so muß ihre Zusammensetzung aus x und $\varkappa$ übrigens ganz willkührlich bleiben, wenn sie nur für $\varkappa = 0$ in die Ordinate y der gesuchten Kurve übergeht. Wie aber diese Funktion von x und $\varkappa$ gedacht werden mag, so ist sie doch auch immer als eine Funktion von $\varkappa$ anzusehen; folglich ist sie auch allemal nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze in eine Reihe zu verwandeln, die nach Potenzen von $\varkappa$ fortläuft; und, da diese Funktion, folglich diese Reihe, für $\varkappa = 0$ in die Ordinate y der gesuchten Kurve übergehen muß, diese Reihe aber für $\varkappa = 0$ in ihr erstes Glied wirklich übergeht, so muß das erste Glied dieser Reihe die Ordinate y der gesuchten Kurve selber seyn, wo y eine gesuchte Funktion von x vorstellt. Bezeichnet man daher diese Reihe, wie sie der Maclaurin'sche Lehrsatz liefert, durch

$$y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \ldots,$$

so sind die Koeffizienten $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. als Funktionen von x anzusehen, welche ebenso beliebig sind, als die Funktion von x und $\varkappa$ beliebig ist, durch welche die Ordinate der nächsten Nachbarkurven vorgestellt gedacht worden ist.

Sollen aber die gesuchten Kurven nicht mit allen möglichen nächsten Nachbarkurven in Vergleichung kommen, sondern nur mit einer Auswahl derselben, so bekommt die Ordinate derselben, die zu der Abscisse x gehört, und welche durch eine Funktion von x und $\varkappa$, oder durch die unendliche Reihe

$$y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \ldots$$

vorgestellt ist, eine Beschränkung, wodurch gerade diejenigen von allen nächsten Nachbarkurven ausgeschlossen werden, welche man ausgeschlossen sehen will. Diese Beschränkung trifft aber dann offenbar allemal die sonst ganz willkührlichen Funktionen von x, welche in obiger Reihe die Koeffizienten bilden, und welche beziehlich durch $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. vorgestellt worden sind.

In der vorliegenden Aufgabe ist die einzige Beschränkung gegeben gewesen, daß die gesuchte Kurve und alle nächsten Nachbarkurven, mit denen sie in Vergleichung gestellt wird, den bestimmten Punkt $(\alpha, \beta)$ mit einander gemein haben sollen, daß also für $x = \alpha$ die beiden Ordinaten

$$y \quad \text{und} \quad y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots$$

einander gleich werden sollen, für jedes $x$. Also sind hier unter $\delta y$, $\delta^2 y$, 2c. 2c. ganz willkührliche Funktionen von x, von ganz willkührlicher Form zu verstehen gewesen, und nur die Koeffizienten in ihnen (d. h. ein einziger derselben) sind so bestimmt gedacht worden, daß diese Funktionen $\delta y$, $\delta^2 y$, 2c. 2c. Null werden, so oft man $\alpha$ statt x schreibt.

In andern Aufgaben können diese Funktionen $\delta y$, $\delta^2 y$, 2c. 2c. eine andere Bedeutung und eine andere Beschränkung erhalten, wie solches jedesmal den Bedingungen und Forderungen der Aufgabe angemessen ist. Allein in allen Aufgaben steht Folgendes ein für allemal und immer fest:

1) Die der gesuchten Funktion y nächst anliegenden Funktionen werden immer durch die Reihe

$$y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots$$

vorgestellt, und die Funktionen $\delta y$, $\delta^2 y$, 2c. 2c. sind immer so weit ganz willkührlich, als sie nicht durch die Bedingungen der Aufgabe selbst einigermaßen beschränkt worden sind.

2) Diese Reihe

$$y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots$$

wird immer durch $y_x$ bezeichnet, wenn man sie kurz ausdrükken will.

3) Alle von $y_x$ abhängigen Ausdrücke V, VV, 2c. lassen sich ebenfalls in Reihen verwandeln, welche nach Potenzen von $x$ fortlaufen; diese Reihen werden beziehlich auch allemal durch

$$V_x \text{ oder } V + x\cdot\delta V + \frac{x^2}{2!}\cdot\delta^2 V + \cdots$$

$$W_x \text{ oder } W + x\cdot\delta W + \frac{x^2}{2!}\cdot\delta^2 W + \cdots$$

ꝛc. ꝛc. bezeichnet, und die Koeffizienten $\delta V$, $\delta^2 V$, ꝛc. ꝛc., $\delta W$, $\delta^2 W$, ꝛc. ꝛc. sind dann von den Koeffizienten $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc. abhängig, und werden immer durch den Maclaurin'schen Lehrsatz, so wie er im (11ten Kap. des V. Th. d. S.) praktisch ausgeführt worden ist, gefunden.

## Aufgabe 2.

(Zu §. 44. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Wird die Kurve NMR verlangt (Fig. 1.), in welcher das Produkt $SS_1 \cdot TT_1$ ein Minimum wird, gegen dasselbe Produkt in jeder andern nächsten Nachbarkurve gehalten, unter übrigens denselben Voraussetzungen, wie in der (Aufg. 1.); so hat man, weil jetzt unter V dieses Produkt verstanden werden muß,

1) $$V = [y + (a - x)\cdot y_1]\cdot[y + (b - x)\cdot y_1],$$

und $V_x$ bedeutet dann dasselbe Produkt, sobald $y_x$ statt y und natürlich auch $\partial(y_x)_x$,

d. h. $$\partial y_x + x\cdot\partial(\delta y)_x + \frac{x^2}{2!}\cdot\partial(\delta^2 y)_x + \cdots$$

statt $y_1$ gesetzt wird. Daher hat man nun, wenn nach dem (11ten Kap. d. V. Th. d. S.) diese letztere Reihe durch

$$(y_1)_x \text{ oder } y_1 + x\cdot\delta y_1 + \frac{x^2}{2!}\cdot\delta^2 y_1 + \cdots$$

bezeichnet wird,

$$\delta V = \partial V_y\cdot\delta y + \partial V_{y_1}\cdot\delta y_1$$

d. h.

2) $$\delta V = \partial V_y\cdot\delta y + \partial V_{y_1}\cdot\partial\delta y,$$

so daß $\delta V = 0$ sich zerlegt in

3) $$\partial V_y = 2y + (a + b - 2x)\cdot y_1 = 0$$

und

4) $\partial V_{y_1} = (a+b-2x)\cdot y + 2(a-x)(b-x)\cdot y_1 = 0.$

Diesen beiden Gleichungen (3. und 4.) also hat die gesuchte Funktion $y = y_x$ zunächst zu genügen.

Eliminirt man aber aus diesen beiden Gleichungen die Ableitung $y_1$, so erhält man

5) $$y = 0.$$

Und da dieser Werth von y den beiden Gleichungen (3. und 4.) wirklich genügt, so kann er die Aufgabe lösen. Es stellt aber diese Gleichung (5.) eine gerade Linie vor, welche mit der Abcissen-Axe zusammenfällt.

Wäre nun $\beta$ von der Null verschieden, und würde doch ausdrücklich zur Bedingung gemacht, daß die Kurve durch den Punkt $(\alpha, \beta)$ hindurch gehen soll, so müßte diese spezielle Aufgabe unmittelbar als unmöglich erkannt werden.

Ferner findet man noch

$$\delta^2 V = \partial^2 V_y \cdot \delta y^2 + 2\cdot \partial^{1,1} V_{y,y_1} \cdot \delta y \cdot \partial \delta y + \partial^2 V_{y_1} \cdot \partial \delta y^2 + \partial V_y \cdot \delta^2 y + \partial V_{y_1} \cdot \partial \delta^2 y,$$

d. h. für diese Werthe, welche $\partial V_y = 0$ und $\partial V_{y_1} = 0$ machen,

$$\delta^2 V = \partial^2 V_y \cdot \delta y^2 + 2\partial^{1,1} V_{y,y_1} \cdot \delta y \cdot \partial \delta y + \partial^2 V_{y_1} \cdot \partial \delta y^2,$$

wo $\partial^2 V_y = 2$, $\partial^{1,1} V_{y,y_1} = a+b-2x$

und $\partial^2 V_{y_1} = 2(a-x)(b-x)$ ist.

Weil nun hier $\delta y$ und $\partial \delta y$ alle möglichen Werthe haben können, so hängt das immerwährende positiv Bleiben des $\delta^2 V$, nach (§. §. 260. 261. d. I. Th. d. S.), weil $\partial^2 V_y = 2$ positiv ist, noch davon ab, ob für diesen Werth von y

$$\partial^2 V_y \cdot \partial^2 V_{y_1} - (\partial^{1,1} V_{x,y})^2$$

d. h. ob $4(a-x)(b-x) - (a+b-2x)^2$, nämlich ob $-(a-b)^2$ positiv ist, was hier offenbar nicht der Fall ist.

Die Untersuchung lehrt also, daß es eine solche Kurve nicht giebt, wie sie in der Aufgabe verlangt wurde, auch wenn $\beta = 0$ ist.

## Aufgabe 3.

(Zu §. 46. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Hätte man aber in der vorhergehenden Aufgabe von den nächsten Nachbarkurven, in Bezug auf welche die gesuchte Kurve die Eigenschaft des Maximums oder Minimums haben soll, alle diejenigen ausgeschlossen, welche nicht auch gerade durch denselben Punkt M hindurchgehen, an welchem die Tangente nun eben gedacht wird, hätte man also nur verlangt, daß das Produkt

$$V = [y+(a-x)\cdot y_1]\cdot[y+(b-x)\cdot y_1],$$

durch welchen Punkt M der Kurve man auch immer die Tangente legen mag, doch immer kleiner seyn soll, als dasselbe Produkt, bloß in allen denjenigen nächsten Nachbarkurven, welche jedesmal durch denselben Punkt M hindurchgehen, so wäre der im (§. 477. III. B.) erwähnte Fall eingetreten, weil man sich nun $\delta y$ für jeden Punkt M zwar als eine beliebige Funktion von x, aber doch für jeden andern Punkt M, als eine etwas abgeänderte, nämlich immer als eine mit der Eigenschaft begabte Funktion von x denken müßte, vermöge welcher sie für den jedesmaligen, dem Punkte M zukommenden besondern Werth von x, (so wie dann auch $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, ꝛc.) $= 0$ wird, obgleich die Ableitung $\partial\delta y$ für denselben Werth von x keineswegs $= 0$ zu werden braucht. — Nun wäre die Gleichung $\delta V = 0$, weil jetzt bloß $\delta V = \partial V_{y_1}\cdot\partial\delta y$ wird, bloß diese:

$$(a+b-2x)\cdot y+2(a-x)(b-x)\cdot\partial y_x = 0.$$

Dies ist eine totale Differenzialgleichung der ersten Ordnung, und giebt, integrirt nach (pag. 59. d. VI. Th.),

$$y^2 = C\cdot(a-x)(b-x) \quad \text{oder} \quad y_x = \sqrt{C\cdot(a-x)(b-x)}.$$

Soll nun die gesuchte Kurve noch durch den Punkt $(\alpha, \beta)$ hindurchgehen, so muß $y_\alpha = \beta$, also $\beta = \sqrt{C\cdot(a-\alpha)(b-\alpha)}$ werden, woraus sich die Konstante C bestimmt, so daß

$$y^2 = \beta^2\cdot\frac{(a-x)(b-x)}{(a-\alpha)(b-\alpha)}$$

die Gleichung der gesuchten Kurve ist, und eine Ellipse giebt, wenn

$\alpha$ zwischen a und b liegt, außerdem aber eine Hyperbel vorstellt, nach (Th. IV. Anhang pag. 23. Note).

Weil aber jetzt, in so ferne $\delta y = 0$, aber nicht $\partial\delta y = 0$ ist, bloß

$$\delta^2 V = \partial^2 V_{y_1} \cdot \partial\delta y^2 + \partial V_{y_1} \cdot \partial^2 \delta y$$

wird, während für die Werthe von y, welche $\partial V_{y_1}$ zu Null machen, und welche hier zunächst gefunden werden, dieser Ausdruck $\delta^2 V$ wiederum noch einfacher sich gestaltet, nämlich

$$\delta^2 V = \partial^2 V_{y_1} \cdot \partial\delta y^2;$$

so hängt dessen positiv oder negativ Seyn bloß von dem positiv oder negativ Seyn der Ableitung $\partial^2 V_{y_1}$ ab. Nun ist aber

$$\partial V_{y_1} = (a+b-2x) \cdot y + 2(a-x)(b-x) \cdot y_1,$$

also $\partial^2 V_{y_1} = 2(a-x)(b-x)$.

Da nun dieser Werth von $\partial^2 V_{y_1}$ negativ wird für alle Werthe von x, welche zwischen a und b liegen, so folgt (nach §. 474.), daß das Produkt V allemal ein Maximum ist, so oft der Punkt M zwischen den Punkten N und R liegt, dagegen ein Minimum wird, so oft M links von N oder rechts von R gedacht wird (Fig. 1.), in so ferne im letztern Falle a—x und b—x beide negativ oder beide positiv werden, also $\partial^2 V_{y_1}$ mithin $\delta^2 V$ nun nothwendig positiv wird.

## Aufgabe 4.

(Zu §. 45. d. Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Würde ferner die Kurve gesucht, für welche dasselbe Produkt $SS_1 \cdot TT_1$ (Fig. 1.) oder V, nämlich

$$V = [+(a-x) \cdot \partial y_x] \cdot [y + (b-x) \cdot \partial y_x]$$

ein Minimum werden soll, unter allen ähnlichen Produkten, welche zu denjenigen der nächsten Nachbarkurven gehören, deren zu dieser Abscisse $OP = x$ gehörige Tangenten alle unter sich und mit der Tangente der gesuchten Kurve parallel laufen, so müßte man dasmal die Ordinaten $y_x$ der Nachbarkurven, also die Funktionen $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. so genommen sich denken, daß,

der parallelen Tangenten wegen, $\partial y_x = \partial(y_x)_x$, d. h. $\partial\delta y = \partial\delta^2 y = $ ꝛc. ꝛc. $= 0$ werden muß. Man muß sich also nun $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. zwar als beliebige Funktionen von x denken, jedoch mit der Eigenschaft begabt, daß sie, wenn man nach und nach den Berührungspunkt M ändert, selber in etwas sich ändern, so nämlich, daß nicht $\delta y$ selbst, sondern nur $\partial\delta y$, $\partial\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. für diesen jedesmaligen, dem Punkte M zugehörigen besondern Werth von x, der Null gleich werden. — Die Gleichung $\delta V = 0$ giebt also dasmal, weil jetzt bloß $\delta V = \partial V_y \cdot \delta y$ ist, auch bloß $\partial V_y = 0$ d. h.

$$2y + (a + b - 2x) \cdot \partial y_x = 0,$$

welche, nach (pag. 59. d. VI. Th. d. S.) integrirt,

$$y = C \cdot (x - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)$$

liefert. — Soll nun die Kurve außerdem noch durch den gegebenen Punkt $(\alpha, \beta)$ hindurchgehen, so hat man noch zur Bestimmung der Konstante C, die Gleichung

$$\beta = C \cdot (\alpha - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b),$$

so daß

$$y = \beta \cdot \frac{x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b}{\alpha - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b} \quad \text{oder} \quad y - \beta = \frac{\beta}{\alpha - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b} \cdot (x - \alpha)$$

die Gleichung der gesuchten Kurve ist. Diese stellt übrigens eine gerade Linie vor, welche die Abscissen-Axe genau in der Mitte U zwischen $S_1$ und $T_1$ trifft, übrigens durch den gegebenen Punkt $(\alpha, \beta)$ hindurchgeht, wie (Fig. 2.) zeigt.

Da übrigens aus

$$\delta V = \partial V_y \cdot \delta y, \text{ wenn } \partial V_y = 0 \text{ ist,}$$

sogleich $\delta^2 V = \partial^2 V_y \cdot \delta y^2 = 2 \cdot \delta y^2$

hervorgeht, also $\delta^2 V$ positiv ist, so giebt diese Auflösung ein Minimum. *)

---

*) Verfolgt man diese Auflösung geometrisch, so sieht man (Fig. 2.) S mit N, T dagegen mit R zusammenfallen. Der Ausdruck V, welcher das Produkt der beiden Ordinatenwerthe der Tangente vorstellt, ist dasmal negativ, weil der zweite Faktor den negativen Werth $-TT_1$

## Aufgabe 5.

(Zu §. 57. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Soll die Kurve gesucht werden, welche an jedem Punkte M (Fig. 1.) die Eigenschaft hat, daß das Produkt der Differenzen SN und TR, nämlich das Produkt V der beiden Ausdrücke

$$y+(a-x)\cdot\partial y_x-[y_x]_a \quad \text{und} \quad y+(b-x)\cdot\partial y_x-[y_x]_b$$

(welche den Unterschied ausdrücken der Ordinaten der Tangente und der Kurve, die beide zu einer und derselben Abscisse a, oder beide zu einer und derselben Abscisse b gehören) ein Minimum oder Maximum werde; — so hat man, wenn wie im (§. 477. N. IV.) $[y_x]_a$ durch $y'$, und $[y_x]_b$ durch $y''$, so wie $\partial y_x$ durch $y_1$ bezeichnet wird,

$$V = (y+(a-x)\cdot y_1-y')\cdot(y+(b-x)\cdot y_1-y'').$$

Ferner hat man jetzt

$$\delta V = \partial V_y\cdot\delta y+\partial V_{y_1}\cdot\delta y_1+\partial V_{y'}\cdot\delta y'+\partial V_{y''}\cdot\delta y'',$$

während nach (§. 244. d. V. Th. d. S.)

$$\delta y_1 = \partial\delta y, \quad \delta y' = \delta y_a \quad \text{und} \quad \delta y'' = \delta y_b$$

ist, wenn der Kürze wegen $\delta y_a$, $\delta y_b$ statt $[(\delta y)_x]_a$, $[(\delta y)_x]_b$ stehen (§. 204. d. V. Th. d. S.), d. h. beziehlich das bedeuten, was aus $\delta y$ als Funktion von x hervorgeht, sobald einmal a, dann b, statt x gesetzt wird.

Die Gleichung $\delta V = 0$ zerfällt daher jetzt in diese 4

---

hat. — Das Produkt der als positiv gedachten Linien $SS_1$ und $TT_1$ ist daher eigentlich ein Maximum, weil nur dann $V = -SS_1\cdot TT_1$ ein Minimum seyn kann. Und in der That ist jetzt, wo $S_1U = T_1U$ ist, auch $SS_1 = TT_1$; während jede andere mit dieser ST parallele Tangente z. B. VW für jede andere nächstanliegende Kurve, die eine der Ordinaten um ein Stück $SV = TW = z$ größer, die andere um dasselbe Stück dagegen kleiner macht, so daß das Produkt derselben durch

$$(SS_1-z)(SS_1+z), \text{ d. h. durch } SS_1^2-z^2$$

ausgedrückt, also offenbar um das Stück $z^2$ kleiner ist, als das erstere Produkt $SS_1\cdot TT_1$, welches hier $= SS_1^2$ gefunden wurde.

Gleichungen,

$$1)\quad \partial V_y = 2y+(a+b-2x)\cdot\partial y_x-y'-y = 0,$$

$$2)\quad \partial V_{y_1} = (a+b-2x)\cdot y+2(a-x)(b-x)\cdot\partial y_x-(b-x)\cdot y' -(a-x)\cdot y'' = 0,$$

$$3)\quad \partial V_{y'} = -y-(b-x)\cdot\partial y_x+y'' = 0,$$

$$4)\quad \partial V_{y''} = -y-(a-x)\cdot\partial y_x+y' = 0;$$

welche nicht bloß

$$5)\quad y = \frac{b\cdot y'-a\cdot y''}{b-a}+\frac{y''-y'}{b-a}\cdot x$$

liefern, sondern auch wirklich alle 4 durch diese letztere Gleichung (5.) identisch werden, und $y'$ d. h. $y_a$, so wie $y''$ d. h. $y_b$ völlig unbestimmt lassen, so daß man dieser in (5.) ausgedrückten und gesuchten Kurve (dasmal übrigens eine gerade Linie) noch zur Bedingung machen kann, daß sie durch zwei gegebene Punkte hindurchgehe oder sonst zweien ähnlichen Bedingungen genüge (wodurch sich dann die Werthe von $y'$ und $y''$ bestimmen).

## Aufgabe 6.

(Zu §. 57. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Sollte der Unterschied $SS_1\cdot TT_1-NR^2$ (Fig. 1.), zwischen dem eben bemerkten Produkte und dem Quadrate der zu $x=a$ und $x=b$ gehörigen Sehne der Kurve, ein Maximum oder Minimum werden, so hätte man jetzt

$$V = [y+(a-x)\cdot y_1-y'']\cdot[y+(b-x)\cdot y_1-y''] -[(b-a)^2+(y''-y')^2],$$

und die 4 Gleichungen, zu welchen $\delta V = 0$ jetzt führt, wären

$$1)\quad 2y+(a+b-2x)\cdot\partial y_x-y'-y'' = 0$$

$$2)\quad (a+b-2x)\cdot y+2(a-x)(b-x)\cdot\partial y_x-(b-x)\cdot y'-(a-x)\cdot y'' = 0$$

$$3)\quad -y-(b-x)\cdot\partial y_x-2y'+3y'' = 0$$

$$4)\quad -y-(a-x)\cdot\partial y_x+3y'-2y'' = 0;$$

und allen diesen 4 Gleichungen wird genügt durch die Gleichung

5) $y = c,$

wo c eine noch willkührliche Konstante ist. Diese Gleichung stellt aber eine, mit der Abscissen-Axe parallele, gerade Linie vor, die man noch zwingen kann, durch einen gegebenen Punkt $(\alpha,\beta)$ hindurchzugehen, so, daß sie dann durch die Gleichung $y = \beta$ ausgedrückt wird.

Wäre zu dieser Aufgabe noch die Bedingung hinzugefügt worden, daß die Differenz $y''-y'$ konstant bleiben soll, d. h. schlösse man von den nächsten Nachbarkurven diejenigen aus, in denen die Differenz ihrer zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten nicht immer einen und denselben Werth behält, so wäre $\delta(y''-y') = 0$ d. h. $\delta y_b - \delta y_a = 0$, also $\delta y_b = \delta y_a$ *); und man hätte nun vorher aus

$$\delta V = \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \partial \delta y + \partial V_{y'} \cdot \delta y_a + \partial V_{y''} \cdot \delta y_b = 0$$

einen dieser letztern beiden Faktoren eliminiren müssen, um in $\delta V$ bloß von einander unabhängige Faktoren zu erhalten, deren Koeffizienten dann einzeln $= 0$ sind. Man erhält daher nun aus $\delta V = 0$ nur 3 Gleichungen, nämlich die Gleichungen

1) $2y + (a+b-2x) \cdot \partial y_x - y' - y'' = 0$

2) $(a+b-2x) \cdot y + 2(a-x)(b-x) \cdot \partial y_x - (b-x) \cdot y' - (a-x) \cdot y'' = 0$

3) $-2y - (a+b-2x) \cdot \partial y_x + y' + y'' = 0,$

welche sich, wie man sieht, in diesem Einzelfalle bloß auf zwei Gleichungen reduziren, die durch Elimination von $\partial y_x$,

4) $$y = \frac{b \cdot y' - a \cdot y''}{b-a} + \frac{y''-y'}{b-a} \cdot x$$

liefern, welche Gleichung (4.) wirklich allen 3 Gleichungen (1—3.) genügt, und abermals die Gleichung einer geraden Linie ist.

Da aber in dieser Gleichung $y'$ und $y''$ noch ganz unbe-

---

*) Man vergesse nicht, daß $\delta y_b$, $\delta y_a$ das bedeuten, was aus $\delta y$ als Funktion von x hervorgeht, wenn beziehlich b oder a statt x gesetzt wird.

stimmt bleiben, so kann man der Aufgabe selbst, damit sie eine bestimmte Auflösung habe, noch zwei Bedingungen hinzufügen, entweder daß die gesuchte Kurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgehe, oder daß sie nur durch einen gegebenen Punkt hindurchgehe, und daß zugleich jene konstante Differenz $y''-y'$ auch eine gegebene sey; oder dergl. mehr.

## Aufgabe 7.

(Zu §. 68—70. der Lehre vom Größten und Kleinsten.) *)

Es soll die Kurve $y = y_x$ gefunden werden, welche zwischen gegebenen zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Grenz-Ordinaten die kürzeste ist.

Auflösung. Wird durch V diese Länge der Kurve bezeichnet, so hat man nach (Anhang zum IV. Th. d. S. Nro 50.)

1) $$V = \int_{b\div a} \sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx;$$

also nach der Bezeichnung der (Nro V. des §. 477.), wenn $\partial y_x$ durch $y_1$ vorgestellt wird,

2) $$U = \sqrt{1+y_1^2}, \text{ so wie } V = \int_{b\div a} U\cdot dx.$$

Wird nun die Ordinate der nächsten Nachbarkurven durch

$$y_u \text{ d. h. } y_x + u\cdot\delta y + \frac{u^2}{2!}\cdot\delta^2 y + \cdots$$

vorgestellt, so hat man die Länge dieser Nachbarkurven

3) $$V_u = \int_{b\div a} U_u\cdot dx, \text{ und dabei } U_u = \sqrt{1+\partial(y_u)_x^2}.$$

Daraus folgt

4) $$\delta V = \int_{b\div a} \delta U\cdot dx, \text{ und } \delta U = \partial U_{y_1}\cdot\partial\delta y,$$

---

*) In der „Lehre vom Größten und Kleinsten, Berlin 1825" deren (§. §.) hier bei den einzelnen Aufgaben angeführt sich finden, so daß letztere als die zu ersteren gehörigen Beispiele anzusehen sind, steht jedesmal $U_{b\div a}$ wo hier V, und V wo hier U. — Wir glauben hier besonders darauf aufmerksam machen zu müssen, um jedem möglichen Irrthume zuvor zu kommen.

weil U dasmal y selbst nicht enthält; während

5) $$\partial U_{y_1} = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

ist. Man hat also nun

6) $$\delta V = \int_{b\div a} \partial U_{y_1} \cdot \partial \delta y = \int_{b\div a} \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} \cdot \partial \delta y \cdot dx.$$

Integrirt man hier theilweise, um $\delta V$ auf die in (N. V. d. §. 477.) verlangte Form zu bringen, so erhält man

7) $$\delta V = [\partial U_{y_1} \cdot \delta y]_{b\div a} - \int_{b\div a} \partial(\partial U_{y_1}) \cdot \delta y \cdot dx.$$ *)

Die Gleichung $\delta V = 0$ zerfällt daher jetzt (nach §. 335. d. VI. Th. d. S.) in die allgemeine Gleichung

I. $$\partial(\partial U_{y_1}) = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right) = 0,$$

und in die Grenzgleichung

II. $$[\partial U_{y_1}]_b \cdot \delta y_b - [\partial U_{y_1}]_a \cdot \delta y_a = 0.$$ **)

Die Gleichung (I.) giebt, wenn man sie integrirt,

8) $$\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} = C \quad \text{oder} \quad y_1 = c \quad \text{d. h.} \quad \partial y_x = c,$$

wo c eine willkührliche Konstante ist. Dieselbe, noch einmal integrirt, giebt

---

*) Das bloße ∂ ohne nähere Bestimmung, drückt allemal die Ableitung nach allem x aus, sowohl nach dem x, welches explizit, als auch nach dem x, welches implizit vorkommt.

**) Die Ausdrücke $\delta y_b$, $\delta y_a$, $[\partial U_{y_1}]_b$, $[\partial U_{y_1}]_a$ bedeuten hier und in der Folge das, was aus $\delta y$ und $\partial U_{y_1}$ als Funktionen von x hervorgeht, wenn man in letzteren statt jedes x (was explizit oder implizit vorkommt) einmal b, oder ein anderes mal a setzt. Man könnte dasselbe nach Anleitung des (§. 204. d. V. Th. d. S.) durch

$$[(\delta y)_x]_b, \quad [(\delta y)_x]_a, \quad [(\partial U_{y_1})_{(x)}]_b, \quad [(\partial U_{y_1})_{(x)}]_a$$

bezeichnen, würde aber dadurch einer zu großen Unbequemlichkeit des Schreibens ausgesetzt.

9) $$y = c \cdot x + c_1,$$

wo $c_1$ eine neue willkührliche Konstante ist.

Die Grenzgleichung (II.) zerfällt, wegen der Willkührlichkeit von $\delta y_b$ und $\delta y_a$ wiederum in die beiden, nämlich

$$[\partial U_{y_1}]_b = 0 \quad \text{und} \quad [\partial U_{y_1}]_a = 0,$$

d. h. $$\left[\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right]_b = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right]_a = 0;$$

und diese fallen dasmal, wenn man statt $y_1$ seinen Werth $c$ setzt, in die einzige

10) $$c = 0$$

zusammen, so daß

11) $$y_1 = 0 \quad \text{und} \quad y = c_1$$

allen 3 Bedingungen (I. und II.) genügt. Diese Gleichung (11.) stellt aber eine gerade, mit der Abscissen-Axe parallele Linie vor, welche man noch zwingen kann, in so ferne $c_1$ noch ganz unbestimmt geblieben ist, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, oder einer ähnlichen Bedingung noch zu genügen.

Will man aber analytisch untersuchen, ob dieses Resultat wirklich ein Maximum oder ein Minimum liefert, und welches von beiden, so muß man noch

$$\delta^2 V = \int_{b \div a} \delta^2 U \cdot dx$$

für diese gefundenen Werthe von y untersuchen, um zu sehen, ob es für jedes x positiv bleibt, oder immerfort negativ ist.

Nun ist aber, weil U dasmal kein y enthält,

$$\delta^2 U = \partial^2 U_{y_1} \cdot \partial \delta y^2 = \frac{1}{(1+y_1^2)\cdot\sqrt{1+y_1^2}} \cdot \partial \delta y^2,$$

wo die Wurzel $\sqrt{1+y_1^2}$, wie in U selbst, nothwendig ihren positiven Werth vorstellt. Setzt man also hierin statt $y_1$ seinen Werth 0, so wird

$$\delta^2 U = \partial \delta y^2,$$

also

$$\delta^2 V = \int_{b \div a} \partial \delta y^2 \cdot dx;$$

Und weil hier der Ausdruck unter dem Integralzeichen, nämlich $\partial\delta y^2$, allemal positiv bleibt, für alle Werthe von x zwischen a und b, so ist nach (§. 162. d. IV. Th. d. S.) dieses Integral selbst positiv, folglich V ein Minimum.

## Aufgabe 8.

(Zu §. §. 68—70. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Hätte man nicht unter allen möglichen, sondern nur unter allen denjenigen nächsten Nachbarkurven, welche durch dieselben, gegebenen oder nicht gegebenen Endpunkte hindurchgehen, die Kurve der vorhergehenden Aufgabe aufgesucht, so hätte man $\delta y$ zwar beliebig, aber doch so sich denken müssen, daß

$$\delta y_a = \delta y_b = 0$$

wird. Dann wäre

$$\delta V = -\int_{b\div a} \partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right)\cdot\delta y\cdot dx = 0;$$

also wäre bloß die einzige Gleichung (I. der Aufg. 7.) vorhanden gewesen, welche $\partial y_x = c$ und

$$y = c\cdot x + c_1,$$

also eine gerade Linie, liefert, die man noch zweien Bedingungen unterwerfen kann, durch welche die Konstanten c und $c_1$ ihre Bestimmung finden. Die Konstanten werden also bestimmt etwa dadurch, daß die Endpunkte der gesuchten Kurve gegeben sind, oder zwei andere Punkte derselben, oder irgend zwei ähnliche Bedingungen.

## Aufgabe 9.

(Zu §. §. 73—76. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Ist zur Bedingung gemacht, daß die gesuchte Kurve einerseits durch die zur Abciſſe $OS_1 = a$ (Fig. 3.) gehörige Ordinaten-Richtung $SS_1$, andrerseits aber durch eine, mittelst der Gleichung

1) $$\varphi_{x,y} = 0$$

gegebene Kurve DRF begränzt werde; ist also die Aufgabe so gegeben: „zwischen der geraden Linie $SS_1$ und der Kurve DRF die kürzeste Linie zu finden", so hat man zwar noch immer

$$2) \qquad V = \int_{b \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx,$$

aber jetzt

$$3) \qquad V_\varkappa = \int_{b_\varkappa \div a} \sqrt{1 + \partial (y_\varkappa)_x^2} \cdot dx,$$

weil jetzt die nächsten Nachbarkurven alle zwar in der Kurve DRF sich endigen, aber doch in nächst aneinander liegenden Punkten derselben sich endigen können, deren Abscisse durch

$$b_\varkappa \qquad \text{oder} \qquad b + \varkappa \cdot \delta b + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 b + \cdots$$

vorgestellt seyn mag. Und da alle durch die Ordinate $(y_\varkappa)_x$ vorgestellten nächsten Nachbarkurven sich ebenfalls auf der gegebenen Kurve DRF endigen sollen, so sind die Abscisse $b_\varkappa$ und die zugehörige Ordinate $[(y_\varkappa)_x]_{b_\varkappa}$ *) einer jeden einzelnen dieser Nachbarkurven, (so wie der gesuchten Kurve selbst für $\varkappa = 0$) zu gleicher Zeit Koordinatenwerthe der Grenzkurve DRF, also Werthe von $x$ und von $y$, welche der Gleichung (1.), nämlich der Gleichung $\varphi = 0$, genügen müssen. Also hat man noch im Sinne der (§. §. 247. 248. d. V. Th. des S.), wenn man diese Werthe

$b_\varkappa$ und $[(y_\varkappa)_x]_{b_\varkappa}$ beziehlich durch $x_\varkappa$ und $y_\varkappa$

bezeichnet, die Gleichung

$$\varphi_{x_\varkappa, y_\varkappa} = 0, \quad \text{d. h. } \varphi_\varkappa = 0, \quad \text{d. h. } \varphi + \varkappa \cdot \delta\varphi + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2\varphi + \cdots = 0,$$

also auch

$$4) \qquad \delta\varphi = 0 \quad \text{d. h. } \partial\varphi_x \cdot \delta x + \partial\varphi_y \cdot \delta y = 0,$$

---

*) Der Ausdruck $(y_\varkappa)_x$ stellt die zur Abcisse x gehörige Ordinate der nächsten Nachbarkurven und der gesuchten Kurve vor (letzteres wenn $\varkappa = 0$ gedacht wird). Der Ausdruck $[(y_\varkappa)_x]_{b_\varkappa}$ bedeutet nun aber das, was aus dieser Funktion von x wird, wenn man noch die Grenz-Abscisse $b_\varkappa$ statt x setzt.

wenn nur in dieser Gleichung

unter $x$, $y$, $\delta x$ und $\delta y$

beziehlich $b$, $y_b$, $\delta b$ und $\delta y_b + [\partial y_x]_b \cdot \delta b$

verstanden wird, *) so daß die Gleichung (4.) sogleich auch in folgende

---

*) Da nämlich in diesem Augenblicke $x_x = b_x$, also auch

$$x + x \cdot \delta x + \cdots = b + x \cdot \delta b + \cdots$$

ist, so ist nicht bloß $x = b$, sondern auch $\delta x = \delta b$. — Und weil ferner

$$y_x = [(y_x)_x]_{b_x}$$

ist, so ist die Reihe

$$y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots$$

keine andere als diejenige, welche aus

$$y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots$$

hervorgeht, wenn man überall statt $x$ die Reihe $b_x$, d. h. die Reihe

$$b + x \cdot \delta b + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 b + \cdots,$$

substituirt. Man findet daher $\delta y$, wenn man den Ausdruck $[(y_x)_x]_{b_x}$ nach allem $x$ differenziirt und dann Null statt $x$ schreibt. Dies giebt aber

$$\delta y = \delta y_b + [\partial y_x]_b \cdot \delta b,$$

wie solches im (11ten Kap. d. V. Th. d. S.) besonders gezeigt ist, vorzüglich im (§. 256.) daselbst. Es ist nämlich einerlei, ob man $[(y_x)x]_{b_x}$ so sich bildet, wie das Zeichen es verlangt, oder ob man in $y_x$, d. h. in

$$y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots,$$

statt alles impliziten $x$ (in $y$, $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc.) zuerst $x_x$,

d. h. $$x + x \cdot \delta x + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 x + \cdots,$$

substituirt, zuletzt aber nicht bloß $b$ statt $x$, sondern auch $\delta b$ statt $\delta x$, so wie $\delta^2 b$ statt $\delta^2 x$ schreibt, u. s. w. f.

5) $(\partial\varphi_{\mathfrak{x}}+\partial\varphi_{\mathfrak{y}}\cdot\partial y_x)\cdot\delta b+\partial\varphi_{\mathfrak{y}}\cdot\delta y_b=0$

übergeht, unter der Voraussetzung, daß auch hier unter $\mathfrak{x}$ und x nichts anders als b, unter $\mathfrak{y}$ dagegen die Ordinate $y_b$, so wie unter $\delta y_b$ das verstanden wird, was aus $\delta y$ als Funktion von x hervorgeht, wenn man b statt x substituirt.

Dieser Gleichung (5.) ist also dasmal die Funktion $\delta y$ von x an der Grenze, wo x den besondern Werth b hat (der in der Regel selber noch gesucht ist), unterworfen, so daß solche Funktion $\delta y$ übrigens, und namentlich der Form nach, ganz willkührlich bleibt.

Bedenkt man nun, daß nach (§. 205. d. V. Th. d. S.) es einerlei ist, ob man $f_x$ nach x integrirt, und dann b statt x setzt, oder ob man sogleich in $f_x$ b statt x setzt, und dann $f_b$ nach b integrirt, so hat man noch

$$\partial(\int_{b\div a}U\cdot dx)_b=\partial(\int U_b\cdot db)_b=U_b,$$

wenn hier nur unter $U_b$ das verstanden wird, was aus $U_{x,y,y_1}$ hervorgeht, wenn man statt eines jeden explizit und implizit vorkommenden x jetzt b substituirt. Da nun $V_{\varkappa}$ ebenfalls $\varkappa$ doppelt enthält, nämlich einmal in $y_{\varkappa}$ und dann noch in $b_{\varkappa}$, was nach der Integration statt x gesetzt werden muß, so wird dasmal auch $\delta V$ gefunden, wenn man $V_{\varkappa}$ nach allem $\varkappa$ differenziirt und dann Null statt $\varkappa$ schreibt, wie solches ebenfalls im (§. 256. des 11ten Kap. d. V. Th. d. S.) hinlänglich nachgewiesen ist. Man hat daher dasmal

$$\delta V=\int_{b\div a}\delta U\cdot dx+U_b\cdot\delta b,$$

d. h. nach der Aufgabe (7.)

6) $\delta V=-\int_{b\div a}\partial(\partial U_{y_1})\cdot\delta y\cdot dx+[\partial U_{y_1}]_b\cdot\delta y_b-[\partial U_{y_1}]_a\cdot\delta y_a+U_b\cdot\delta b,$

so daß also jetzt $\delta V$ außer den Gliedern, die es in der Aufgabe (7.) hat, das Grenzglied $U_b\cdot\delta b$ noch dazu bekommt. Die Gleichung $\delta V=0$ zerfällt daher jetzt in die allgemeine Gleichung

I. $\partial(\partial U_{y_1})=0,$

d. h. $\partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right) = 0; \quad y_1 = c; \quad y = c \cdot x + c_1$

und in die Grenzgleichung

II. $[\partial U_{y_1}]_b \cdot \delta y_b - [\partial U_{y_1}]_a \cdot \delta y_a + U_b \cdot \delta b,$

wenn man die Bezeichnung, wie in der vorigen Aufgabe nimmt. Eliminirt man nun aus dieser Gleichung (II.) und aus der obigen Gleichung (5.) den Faktor $\delta y_b$ *), so erhält man eine Gleichung, welche wegen der Willkührlichkeit von $\delta y_a$ und $\delta b$ sogleich in die beiden zerfällt, nämlich in

III. $[\partial U_{y_1}]_a = 0$ oder $\left[\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right]_a = 0$

und

IV. $-\partial U_{y_1} \cdot (\partial \varphi_x + \partial \varphi_y \cdot \partial y_x) + U \cdot \partial \varphi_y = 0,$

wenn nur in (IV.) statt $x$ und $x$ (sie mögen explizit oder implizit erscheinen) allemal $b$, so wie statt $y$ auch die Grenz-Ordinate $y_b$ substituirt wird.

Die Gleichung (III.) giebt $c = 0$, und die Gleichung (IV.) geht dadurch in

7) $\partial \varphi_y = 0$

über, wo $\xi$ den gesuchten Werth $b$ vorstellt, während statt $y$ der Werth $y_b$, oder jetzt $c_1$, gesetzt werden muß. Diese Gleichung (7.) in Verbindung mit der (1.), welche letztere für $\xi = b$ und $y = y_b = c_1$ ebenfalls statt finden muß, giebt die Werthe von $b$ und $c_1$.

---

*) Eigentlich muß aus $\delta V = 0$ und aus der Gleichung (5.) zuvor $\delta y_b$ eliminirt, und dann erst die neue Gleichung nach den (§. §. 334—337. d. V. Th d. S.) zerlegt werden. Dies führt aber genau zu demselben Resultate, als wenn man aus dem $\delta V = 0$ zuerst die allgemeine Gleichung (I.) absondert, und dann erst aus dem nun noch übrigen $\delta V = 0$, jenes $\delta y_b$ eliminirt. Deshalb ist das Verfahren im Texte oben erlaubt, und bereits in der Aufgabe (7.) befolgt worden.

Die gesuchte Kurve NR ist daher dasmal eine gerade, mit der Abscissenaxe parallele, und (in so ferne wegen der Gleichung (7.) für $\xi = b$, $\partial y_x = \frac{1}{0}$ wird) zu gleicher Zeit auf der gegebenen Kurve DRF senkrechte Linie, so wie solche in (Fig. 4.) zu sehen.

## Aufgabe 10.

(Zu §. §. 73—76. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Hätte man aber die Anzahl der nächsten Nachbarkurven mehr beschränkt, und nicht unter allen möglichen Kurven, sondern nur unter denjenigen, welche alle (mit der gesuchten Kurve selbst) durch einen und denselben zu $x = OS_1 = a$ (Fig. 3.) gehörigen Anfangs-Punkt gehen, die Kurve, die das Minimum hat, heraussuchen wollen, so wäre $\delta y$ noch der Bedingung unterworfen gewesen, daß $\delta y_a = 0$ wird; und dann hätte $\delta V$ in (6.) der Aufgabe (9.) das mit diesem Faktor behaftete Glied verloren, welches daher auch in der Grenzgleichung (II.) nicht erschienen wäre. Die vorliegende Gleichung (III.) wäre dann gar nicht erschienen, und die gesuchte Kurve wäre die durch $y = c \cdot x + c_1$ vorgestellte gerade Linie gewesen, deren Konstanten den Gleichungen (IV.) und (1.) der Aufgabe (9.), nämlich den Gleichungen

1) $\partial\varphi_y - c \cdot \partial\varphi_x = 0$ und 2) $\varphi_{x,y} = 0$,

noch unterworfen sind, wenn nur in diesen letztern Gleichungen unter $\xi$ die Grenz-Abscisse b, unter $y$ dagegen die Ordinate $y_b$, d. h. $c \cdot b + c_1$ verstanden wird. Weil aber diese Gleichungen (1. u. 2.) von den 3 Unbekannten b, c, $c_1$ nur zweie bestimmen, so kann die gefundene Linie auch noch gezwungen werden, durch einen gegebenen Punkt hindurchzugehen, mag dies der zu $x = a$ gehörige, also der Anfangspunkt der Kurve, oder irgend ein anderer seyn.

Weil übrigens $-\frac{\partial\varphi_x}{\partial\varphi_y} = \partial y_x$ ist, so drückt die Gleichung (IV. der Aufgabe 9.) d. h. die hiesige Gleichung (1.) aus, daß

$$\partial y_x = -\frac{1}{c} = -\frac{1}{\partial y_x}$$

ist, an der Grenze, wo

$$y_x = x = b,$$

daß also nach (Th. IV. d. S. Anhang Nr. 40. und Nr. 41.) die gesuchte kürzeste Linie auf der gegebenen Grenzkurve $\varphi_{x,y} = 0$ senkrecht steht.

## Aufgabe 11.

(Zu §. §. 73—76. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Sollte die kürzeste Linie gesucht werden zwischen zweien, beziehlich durch die Gleichungen

$$\psi_{x',y'} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{x,y} = 0$$

gegebenen, Kurven ANB und DRF (Fig. 5.), so wären beide Grenzen, $OS_1 = a$ und $OT_1 = b$, noch unbekannt und der Bedingung der Aufgabe gemäß die dem Minimo der Länge NR zugehörigen Grenzen zu suchen. Man hätte dann

$$1)\ V = \int_{b\div a} \sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx, \quad 2)\ V_\varkappa = \int_{b_\varkappa \div a_\varkappa} \sqrt{1+\partial (y_\varkappa)_x^2}\cdot dx,$$

also

$$3)\quad \delta V = -\int_{b\div a} \frac{\partial y}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\cdot \partial\delta y\cdot dx + \left[\sqrt{1+\partial y_x^2}\right]_b\cdot \delta b - \left[\sqrt{1+\partial y_x^2}\right]_a\cdot \delta a,$$

während a und $y_a$, und auch $a_\varkappa$ und $[(y_\varkappa)_x]_{a_\varkappa}$, beziehlich statt x' und y' gesetzt, der Gleichung $\psi_{x',y'} = 0$ genügen müssen; und b und $y_b$, so wie auch $b_\varkappa$ und $[(y_\varkappa)_x]_{b_\varkappa}$ beziehlich statt x und y in $\varphi_{x,y} = 0$ gesetzt, auch diese Gleichung identisch machen müssen, so daß außer $\delta V = 0$, auch noch

$$\delta\psi = 0 \quad \text{und} \quad \delta\varphi = 0,$$

d. h.

$$4)\quad \partial\psi_{x'}\cdot\delta x' + \partial\psi_{y'}\cdot\delta y' = 0$$

und

$$5)\quad \partial\varphi_x\cdot\delta x + \partial\varphi_y\cdot\delta y = 0,$$

seyn muß, wenn nur in diesen letztern Gleichungen unter

$$x',\ \delta x',\ x,\ \delta x,\ y' \text{ und } y$$

beziehlich $a,\ \delta a,\ b,\ \delta b,\ y_a$ und $y_b$ verstanden werden, während unter $\delta y'$ der Koeffizient von $\varkappa$ in $[(y_\varkappa)_x]_{a_\varkappa}$, so wie unter $\delta y$ der Koeffizient von $\varkappa$ in $[(y_\varkappa)_x]_{b_\varkappa}$ gedacht werden muß, so daß man hat

$$\delta y' = [\partial y_x]_a \cdot \delta a + \delta y_a,$$
$$\delta y = [\partial y_x]_b \cdot \delta b + \delta y_b,$$

wie solches in der Aufgabe (9.) bereits deutlich aus einander gesetzt worden ist.

Bringt man nun $\delta V$ in (3.) durch theilweise Integration auf die im (§. 477. R. V.) als nothwendig erkannte Form, so erhält man, wenn aus den Gleichungen $\delta V = 0$ und denen (4. u. 5.) die Ausdrücke $\delta y_a$ und $\delta y_b$ eliminirt werden, so daß bloß die unabhängigen $\delta y$, $\delta a$ und $\delta b$ übrig bleiben, die 3 Gleichungen, nämlich die allgemeine Gleichung

$$\text{I. } \partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right) = 0, \text{ also } \partial y_x = c, \text{ oder } y = c \cdot x + c_1;$$

und die Grenzgleichungen

$$\text{II. } \partial\psi_{y'} - c \cdot \partial\psi_{x'} = 0,$$

wenn a und $y_a$ beziehlich statt $x'$ und $y'$ gesetzt werden; und

$$\text{III. } \partial\varphi_y - c \cdot \partial\varphi_x = 0,$$

wenn b und $y_b$ beziehlich statt $x$ und $y$ substituirt werden.

Die letztern Gleichungen (II. und III.) in Verbindung mit den gegebenen Gleichungen $\psi = 0$, $\varphi = 0$ an den Grenzen, d. h. mit

$$\psi_{a,c\cdot a+c_1} = 0 \text{ und } \varphi_{b,c\cdot b+c_1} = 0,$$

dienen nun zur Bestimmung der beiden Konstanten $c$ und $c_1$ und der beiden Grenzen a und b.

Und die zu Ende der vorhergehenden Aufgabe angestellte Betrachtung lehrt noch überdieß, daß die hier für die gesuchte

Kurve gefundene gerade Linie $y = c \cdot x + c_1$ auf den beiden gegebenen, sie begrenzenden Kurven ANB und DRF senkrecht steht.

Uebrigens enthält diese Aufgabe (11.) die frühere Aufgabe (7.) als einen besonderen Fall in sich, da die beiden Grenzkurven ANB und DRF mittelst ihrer Gleichungen $\psi = 0$ und $\varphi = 0$ als gerade Linien, und auch als solche gerade Linien gegeben seyn können, welche auf der Axe OX senkrecht stehen, wie dies in der Aufgabe (7.) vorausgesetzt war. Setzt man daher in der hiesigen Aufgabe diesen besondern Fall, durch die schickliche Annahme der Gleichungen $\psi = 0$ und $\varphi = 0$, so wird man zu den Resultaten der Aufgabe (7.) wiederum zurückgeführt werden.

Betrachten wir indeß hier lieber noch den Fall, in welchem die Grenzkurven ANB und DRF zwei beliebige gerade Linien sind, wie in (Fig. 6.), so daß man statt

$$\psi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = 0,$$

jetzt 1) $y' - a_1 \cdot x' - b_1 = 0$ und 2) $y - a_2 \cdot x - b_2 = 0$

hat, so hat man jetzt, außer

$$\partial y_x = c, \quad y_a = c \cdot a + c_1 \quad \text{und} \quad y_b = c \cdot b + c_1,$$

noch $\partial \psi_{x'} = -a_1$, $\partial \psi_{y'} = 1$, $\partial \varphi_x = -a_2$ und $\partial \varphi_y = 1$;

so daß die beiden Grenzgleichungen (II. und III.) jetzt folgende werden, nämlich

3) $1 + c \cdot a_1 = 0$ und 4) $1 + c \cdot a_2 = 0$.

Setzt man nun in die Gleichung (1.) a statt $x'$, und $y_a$ d. h. $c \cdot a + c_1$ statt $y'$; — und eben so in die Gleichung (2.) b statt $x$, und $y_b$ d. h. $c \cdot b + c_1$ statt $y$, — so hat man noch die beiden Gleichungen

5) $(c - a_1) \cdot a + c_1 - b_1 = 0$ und 6) $(c - a_2) \cdot b + c_1 - b_2 = 0$.

Aus den Gleichungen (3. 4. 5. und 6.) müssen also nun die 4 Werthe $c$, $c_1$, a und b gefunden werden.

Die Gleichungen (3. und 4.) bestimmen aber c zweimal, nämlich

$$c = -\frac{1}{a_1} \quad \text{und} \quad c = -\frac{1}{a_2};$$

und enthalten daher einen Widerspruch, wenn nicht $a_1 = a_2$ ist, d. h. wenn die Grenzkurven ANB und DRF nicht mit einander parallel laufen. Diese Aufgabe: „zwischen zweien geraden Linien ANB und DRF die kürzeste Linie zu finden," ist daher unmöglich, so lange nicht diese Grenzlinien ANB und DRF mit einander parallel laufen.

Ist aber $a_1 = a_2$, d. h. laufen die begrenzenden Linien ANB und DRF mit einander parallel, so drücken beide Werthe von $c_1$ aus, daß die gesuchte kürzeste Linie die gerade ist, welche auf diesen beiden parallelen Grenzlinien senkrecht steht. — Die Gleichungen (5. und 6.) bestimmen zuletzt a und b in $c_1$, oder b und $c_1$ in a, oder a und $c_1$ in b, so daß einer der 3 Werthe a, b oder $c_1$ gänzlich unbestimmt bleibt, die gesuchte kürzeste Linie also noch einer neuen Bedingung unterworfen werden kann, etwa noch der Bedingung, daß sie durch einen gegebenen Punkt hindurchgeht.

## Aufgabe 12.

(Zu §. §. 84—86. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Wird zwischen zweien, durch die Gleichungen

$$\psi_{x',y',z'} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{x,y,z} = 0$$

gegebenen Flächen die kürzeste Linie gesucht, so stelle man sie durch die 3 Koordinaten x, $y_x$ und $z_x$ vor *), so wie die 3 zusammengehörigen Koordinaten-Werthe der nächsten Nachbarkurven durch x, $(y_x)_x$, $(z_x)_x$ vorgestellt werden müssen. Sind nun a und b die, selbst noch gesuchten, Werthe von x an den Grenzpunkten der gesuchten Kurve, und wird die Länge der Kurve durch V bezeichnet, so hat man

$$1) \qquad V = \int_{b \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx;$$

dagegen sind die Längen $V_x$ der nächsten Nachbarkurven

$$2) \qquad V_x = \int_{b_x \div a_x} \sqrt{1 + \partial (y_x)_x^2 + \partial (z_x)_x^2} \cdot dx.$$

Deshalb ist nach (§. 256. d. V. Th. d. S.), und wenn man die Bezeichnung, wie hier zuletzt immer geschehen ist, nimmt,

$$3) \qquad \delta V = \int_{b \div a} \frac{\partial y_x \cdot \partial \delta y + \partial z_x \cdot \partial \delta z}{\sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2}} \cdot dx$$

$$+ \left[\sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2}\right]_b \cdot \delta b - \left[\sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2}\right]_a \cdot \delta a.$$

An der erstern Grenze sind die 3 Koordinaten der (gesuchten und der) nächsten Nachbar-Kurven beziehlich

*) Es werden hier immer 3 auf einander senkrechte Ebenen gedacht, auf welche sich die Koordinaten beziehen.

$$a_x, \quad [(y_x)_x]_{a_x}, \quad [(z_x)_x]_{a_x};$$

und da dieser erste Grenzpunkt allemal in der erstern Fläche $\psi_{x',y',z'} = 0$ liegen soll, so müssen jene Koordinaten, beziehlich statt $x', y', z'$ substituirt, diese letztere Gleichung $\psi = 0$ identisch machen, so daß man auch noch hat

4) $\delta\psi = 0$ d. h. $\partial\psi_{x'} \cdot \delta x' + \partial\psi_{y'} \cdot \delta y' + \partial\psi_{z'} \cdot \delta z' = 0,$

wenn nur unter

$$x', \quad y', \quad z', \quad \delta x',$$

beziehlich

$$a, \quad y_a, \quad z_a, \quad \delta a,$$

unter $\delta y', \delta z'$ aber die Koeffizienten von $x$ in den Reihen für $[(y_x)_x]_{a_x}$, $[(z_x)_x]_{a_x}$, verstanden werden, nach (§. 256. d. V. Th. d. S.)

5) $\delta y' = [\partial y_x]_a \cdot \delta a + \delta y_a$ und $\delta z' = [\partial z_x]_a \cdot \delta a + \delta z_a$

ist, also daß die Gleichung (4.) in

6) $(\partial\psi_{x'} + \partial\psi_{y'} \cdot \partial y_x + \partial\psi_{z'} \cdot \partial z_x) \cdot \delta a + \partial\varphi_{y'} \cdot \delta y_a + \partial\varphi_{z'} \cdot \delta z_a = 0$

übergeht, wenn man nur unter $x'$ und $x$ überall die Grenz-Abscisse $a$, unter $y'$ und $z'$ aber beziehlich $y_a$ und $z_a$ versteht. — Ganz Aehnliches gilt an der andern Grenze, so daß man noch

7) $\delta\varphi = 0$ d. h. $\partial\varphi_x \cdot \delta x + \partial\varphi_y \cdot \delta y + \partial\varphi_z \cdot \delta z = 0,$

nämlich

8) $(\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y_x + \partial\varphi \cdot \partial z_x) \cdot \delta b + \partial\varphi_y \cdot \delta y_b + \partial\varphi_z \cdot \delta z_b = 0$

hat, wenn unter $x$ und $x$ allemal die Grenz-Abscisse $b$, unter $y$ und $z$ aber beziehlich $y_b$ und $z_b$ verstanden werden.

Bringt man nun $\delta V$ in (3.) auf die im (§. 477. N. V.) als nothwendig erkannte Form, indem man die mit $\partial dy$ und mit $\partial dz$ behafteten Glieder einzeln theilweise integrirt, so erhält man

$$9)\quad \delta V = -\int_{b\div a}\left\{\begin{array}{l}\partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right)\cdot\delta y\\ +\partial\left(\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right)\cdot\delta z\end{array}\right\}\cdot dx$$

$$+\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right]_b\cdot\delta y_b-\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right]_a\cdot\delta y_a$$

$$+\left[\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\delta y_x^2+\partial z_x^2}}\right]_b\cdot\delta z_b-\left[\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right]_a\cdot\delta z_a$$

$$+\left[\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}\right]_b\cdot\delta b-\left[\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}\right]_a\cdot\delta a.$$

Setzt man nun diesen Ausdruck in $\delta V = 0$ statt $\delta V$, eliminirt man dann mittelst der Gleichungen (6. u. 8.) etwa die beiden Ausdrücke $\delta z_b$ und $\delta z_a$, so erhält man eine Gleichung mit den 6 unabhängigen Faktoren $\delta y$, $\delta z$, $\delta y_a$, $\delta y_b$, $\delta a$ und $\delta b$, so daß deren 6 Koeffizienten einzeln $= 0$ seyn müssen, also daß man die 6 Gleichungen erhält, nämlich:

$$\text{I.}\ \partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right)=0,\quad \text{II.}\ \partial\left(\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right)=0,$$

welches die allgemeinen Gleichungen für das Maximum oder Minimum sind, aus denen $\partial y_x$ und $\partial z_x$ als Konstanten hervorgehen, so daß man aus diesen Gleichungen sogleich

$$10)\quad y = c\cdot x+c_1 \quad \text{und} \quad 11)\quad z = c_2\cdot x+c_3$$

hat; ferner noch die Grenzgleichungen

$$\text{III.}\quad \partial y_x\cdot\partial\varphi_\delta-\partial z_x\cdot\partial\varphi_\eta = 0$$

$$\text{IV.}\quad (1+\partial y_x^2)\cdot\partial\varphi_\delta-\partial z_x\cdot\partial y_x\cdot\partial\varphi_\eta-\partial z_x\cdot\partial\varphi_x = 0,$$

wenn man überall b statt x und x, dagegen beziehlich $y_b$, $z_b$ statt y und z substituirt; — so wie noch

$$\text{V.}\quad \partial y_x\cdot\partial\psi_{\delta'}-\partial z_x\cdot\partial\psi_{\eta'} = 0$$

$$\text{VI.}\quad (1+\partial y_x^2)\cdot\partial\psi_{\delta'}-\partial z_x\cdot\partial y_x\cdot\partial\psi_{\eta'}-\partial z_x\cdot\partial\psi_{x'} = 0,$$

wenn man hier überall a statt x und x', dagegen beziehlich

$y_a$, $z_a$ statt $y'$, $z'$ setzt. Diese letztern 4 Gleichungen, in Verbindung mit den gegebenen Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, welche auch noch statt finden, wenn man beziehlich

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $b$, | $y_b$, | $z_b$, | $a$, | $y_a$, | $z_a$ |
| statt | $x$, | $y$, | $z$, | $x'$, | $y'$, | $z'$ |

schreibt, dienen nun im Allgemeinen zur Bestimmung von

$$c,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ a \text{ und } b. \text{ *)}$$

Es ist also die gesuchte Kurve dasmal wieder eine gerade Linie, welche auf beiden gegebenen Flächen $\psi = 0$ und $\varphi = 0$ senkrecht steht, weil die Gleichungen (III.—IV.) zeigen, daß die gefundenen Gleichungen

$$y = c \cdot x + c_1, \qquad z = c_2 \cdot x + c_3$$

diejenigen der Normale an jeder der beiden gegebenen Flächen sind, nach (IV. Th. d. S. N. 48.). **)

---

*) Weil hier aus (10. u. 11.)

$$\partial y_x = c \quad \text{und} \quad \partial z_x = c_2$$

ist, so ändern sie diese Werthe nicht, man mag $a$ oder $b$ statt $x$ setzen. Man kann daher in diesen Gleichungen (III.—IV.) durchweg $c$ statt $\partial y_x$, und $c_2$ statt $\partial z_x$ schreiben, unbekümmert um den Werth, welchen $x$ selber noch annehmen mag.

**) Die Gleichung (IV.) reduzirt sich nämlich mit Hilfe der Gleichung (III.) bloß auf

$$\partial\varphi_\delta - \partial z_x \cdot \partial\varphi_x = 0,$$

d. h., weil $\partial z_x = c_2$ ist, auf

$$\partial\varphi_\delta - c_2 \cdot \partial\varphi_x = 0,$$

während die Gleichung (III.) jetzt folgende

$$c \cdot \partial\varphi_\delta - c_2 \cdot \partial\varphi_y = 0$$

wird. Bestimmt man hieraus $c$ und $c_2$, so erhält man, wenn den Gleichungen

$$y = c \cdot x + c_1 \quad \text{und} \quad z = c_2 \cdot x + c_3$$

vorher die Form

$$y - \beta = c \cdot (x - \alpha) \quad \text{und} \quad z - \gamma = c_2 \cdot (x - \alpha)$$

## Aufgabe 13.

(Zu §. §. 84—86. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Ist alles wie in der vorhergehenden Aufgabe (12.), aber nur eine Grenzfläche gegeben, nämlich nur $\varphi = 0$, so bleibt alles zunächst wie vorher, nur daß jetzt $\delta a = 0$ ist, und daß die Gleichungen (N. N. 4 und 6. der Aufgabe 12.) ganz wegfallen. Macht man nun zur Bedingung, daß alle nächsten Nachbarkurven, unter denen die kürzeste herausgesucht werden soll, in einem und demselben Punkte anfangen müssen, so daß $y_a = (y_x)_a$ und $z_a = (z_x)_a$ seyn soll, so ist nech

$$1) \quad \delta y_a = 0 \quad \text{und} \quad 2) \quad \delta z_a = 0$$

vorausgesetzt, und es fallen also nun aus dem $\delta V$ in (N. 9. der Aufgabe 12.) die 3 mit $\delta y_a$, $\delta z_a$ und $\delta a$ multiplizirten Glieder heraus, während $\delta z_b$ noch (wie in der Aufgabe 12.) mittelst der Gleichung (N. 8. der Aufgabe 12.) eliminirt werden muß. Außer den allgemeinen Gleichungen (I. und II. der Aufgabe 12.) erhält man daher jetzt nur noch die beiden Grenzgleichungen (III. und IV. der Aufgabe 12.), während die Gleichungen (V. und VI.) daselbst hier gar nicht erscheinen.

Diese beiden Grenzgleichungen, in Verbindung mit $\varphi_{b, y_b, z_b} = 0$, dienen nun zur Bestimmung dreier der 6 Unbekannten

$$c,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ a \text{ und } b,$$

so daß noch dreie derselben unbestimmt bleiben, demnach die, statt der gesuchten Kurve gefundene, gerade Linie noch gezwungen wer-

---

gegeben wird, diese Werthe für c und $c_2$ substituirend, die Gleichungen für die gesuchte Linie, nämlich

$$\partial\varphi_x \cdot (y-\beta) - \partial\varphi_y \cdot (x-\alpha) = 0$$

und $$\partial\varphi_x \cdot (z-\beta) - \partial\varphi_\delta \cdot (x-\alpha) = 0,$$

welche nach (IV. Th. Anhang Nr. 48.) genau die Gleichungen der Normale an $\varphi = 0$ sind.

Gerade so geht aber aus den Gleichungen (V. u. VI.) hervor, daß dieselbe Linie auch Normale an $\psi = 0$ ist.

den kann, durch einen gegebenen Punkt ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) hindurchzugehen (welcher gegebene Punkt der Anfangs-Punkt der Kurve eben so gut wie jeder andere seyn kann), oder irgend einer ähnlichen Bedingung zu genügen; während aus der Form der Gleichungen (III. u. IV.) hervorgeht, daß diese gefundene gerade Linie auf der durch $\varphi = 0$ gegebenen Fläche senkrecht steht.

## Aufgabe 14.

(Zu §. §. 84—86. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Ist wiederum alles wie in der Aufgabe (12.), nur die eine Grenzfläche $\psi = 0$ nicht gegeben; macht man dagegen zur Bedingung, daß die gesuchte Kurve und die nächsten Nachbarkurven alle in der auf der Axe der x senkrechten, vom Anfangspunkte der Koordinaten um a entfernten, Ebene anfangen sollen, so ist nicht mehr $\delta y_a = 0$, $\delta z_a = 0$, sondern bloß noch $\delta a = 0$.

Die Gleichung $\delta V = 0$ in (N. 9. der Aufgabe 12.) verliert jetzt nur das einzige, mit $\delta a$ behaftete, Glied. Von den Koeffizienten der mit $\delta y_a$ und $\delta z_a$ behafteten Glieder wird jeder für sich der Null gleich, und man erhält daher außer den allgemeinen Gleichungen (I. und II.), und außer den Grenzgleichungen (III. und IV.) noch die beiden Grenzgleichungen

$$(\odot)\cdots \quad [\partial y_x]_a = 0 \quad \text{oder} \quad c = 0$$

$$(\mathbb{C})\cdots \quad [\partial z_x]_a = 0 \quad \text{oder} \quad c_2 = 0,$$

welche Gleichungen jetzt an die Stelle der Grenzgleichungen (V. und VI.) treten. Diese 4 Grenzgleichungen in Verbindung mit $\varphi_{b, y_b, z_b} = 0$ dienen nun im Allgemeinen zur Bestimmung der 5 Unbestimmten $c$, $c_1$, $c_2$, $c_3$ und $b$, während a gegeben seyn kann, direkt oder durch eine noch zu erfüllende Bedingung.

Die Gleichungen ($\odot$) und ($\mathbb{C}$) lehren, daß die jetzt gefundene kürzeste Linie eine mit der Axe der x parallele gerade Linie ist, also auf der Grenz-Ebene senkrecht steht, während sie der

Grenzgleichungen (III. und IV.) wegen ohnedies auf der andern gegebenen Grenzfläche $\varphi_{x,y,z} = 0$ senkrecht stehen wird. *)

## Aufgabe 15.

Ist noch alles wie in der Aufgabe (12.), dagegen wiederum die Grenzfläche $\psi = 0$ nicht gegeben.

Macht man aber dafür die Bedingung, daß alle nächsten Nachbarkurven, so wie die gesuchte selbst, in einer Kurve anfangen sollen, welche in der auf der Axe der x senkrechten, vom Anfangs-Punkte der Koordinaten um a entfernten, Ebene liegt, und (auf die daselbst durch die Koordinaten-Ebenen (xy) und (xz) gebildeten Axen bezogen) durch die Gleichung

1) $$\pi_{y',z'} = 0$$

gegeben seyn soll; — so müssen die Koordinaten

$$[(y_x)_x]_a \quad \text{und} \quad [(z_x)_x]_a,$$

wenn solche statt $y'$ und $z'$ beziehlich gesetzt werden, die Gleichung $\pi_{y',z'} = 0$ ebenfalls identisch machen; und es muß daher auch noch in diesem Sinne

$$\delta\pi = 0 \quad \text{oder} \quad \partial\pi_{y'} \cdot \delta y' + \partial\pi_{z'} \cdot \delta z' = 0,$$

d. h. 2) $$\partial\pi_{y'} \cdot \delta y_a + \partial\pi_{z'} \cdot \delta z_a = 0$$

seyn, wenn nur hier unter $y'$ und $z'$ beziehlich $y_a$ und $z_a$ verstanden werden. Die Gleichungen $\delta y_a = 0$, $\delta z_a = 0$ finden daher dasmal nicht statt, obgleich noch immer $\delta a = 0$ ist; aus dem Ausdruck (N. 9. der Aufgabe 12.) für $\delta V$ fällt also dasmal wiederum nur das einzige mit $\delta a$ affizirte Glied fort, während jedoch aus jenem $\delta V = 0$ mittelst der hiesigen Glei-

---

*) In der That ist diese Aufgabe (14.) keine andere, als die Aufgabe (12.) selbst, sobald man statt der dortigen Gleichung

$$\psi_{x',y',z'} = 0$$

der erstern Grenzfläche, jetzt die Gleichung

$$1 \cdot x' + 0 \cdot y' + 0 \cdot z' = a$$

der hiesigen Grenz-Ebene setzt.

chung (2.) noch $\delta z_a$, und außerdem mittelst der Gleichung (N. 8. der Aufgabe 12.) ohnedies $\delta z_b$ eliminirt werden muß.

Die allgemeinen Gleichungen (I. u. II.) für das Maximum oder Minimum bleiben daher immer noch dieselben, aber außer den Grenzgleichungen (III. und IV.) findet dasmal noch die Grenzgleichung

$$(\sigma') \qquad \partial\pi_{z'} \cdot \partial y_x - \partial\pi_{y'} \cdot \partial z_x = 0$$

statt; und diese 3 Grenzgleichungen (III. IV.) und ($\sigma'$) in Verbindung mit den beiden Gleichungen

$$\pi_{y_a, z_a} = 0, \quad \text{und} \quad \varphi_{b, y_b', z_b} = 0$$

dienen nun im Allgemeinen zur Bestimmung der 5 Unbekannten $c$, $c_1$, $c_2$, $c_3$ und $b$, während $a$ direkt oder durch eine neue Bedingung gegeben seyn kann.

Die neue Grenzgleichung ($\sigma'$), welche hier an die Stelle der Grenzgleichungen (V. u. VI. der Aufgabe 12.) getreten ist, drückt aber aus, daß die statt der gesuchten Kurve gefundene gerade Linie auf der Tangente der durch $\pi_{y', z'} = 0$ gegebenen Kurve senkrecht steht.

## Aufgabe 16.

(Zu §. 91. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Die Aufgabe (15.) ist nur ein besonderer Fall dieser andern, die man hat, wenn die in der Aufgabe (12.) gesuchte kürzeste Linie zwar immer noch bis zur Fläche $\varphi_{x, y, z} = 0$ reichen, dagegen auf einer durch die beiden Gleichungen

$$1) \quad \psi_{x', y', z'} = 0 \qquad \text{und} \qquad 2) \quad \psi'_{x', y', z'} = 0$$

gegebenen (doppelt oder einfach gekrümmten oder geraden) Linie anfangen soll, zugleich mit allen nächsten Nachbarkurven, unter denen sie selbst noch herauszusuchen ist. — Jetzt ist aber wiederum $a$ selbst noch gesucht; da ist nicht Null; und die Gleichung (N. 9. der Aufgabe 12.) verliert keines ihrer Glieder. Weil aber nun die zusammengehörigen Koordinaten

$$a_x, \quad [(y_x)_x]_{a_x} \quad \text{und} \quad [(z_x)_x]_{a_x}$$

des Anfangspunktes der gesuchten Kurve sowohl (für $x = 0$), als auch aller nächsten Nachbarkurven, die beiden Gleichungen $\psi = 0$ und $\psi' = 0$ identisch machen müssen, wenn sie beziehlich statt $x'$, $y'$ und $z'$ gesetzt werden, so hat man in diesem Sinne auch noch

$$\delta\psi = 0 \quad \text{und} \quad \delta\psi' = 0,$$

d. h. 3) $\partial\psi_{x'} \cdot \delta x' + \partial\psi_{y'} \cdot \delta y' + \partial\psi_{z'} \cdot \delta z' = 0$

und 4) $\partial\psi'_{x'} \cdot \delta x' + \partial\psi'_{y'} \cdot \delta y' + \partial\psi'_{z'} \cdot \delta z' = 0,$

wenn nämlich in diesen Gleichungen statt $x'$, $y'$, $z'$ und $\delta x'$ beziehlich $a$, $y_a$, $z_a$ und $\delta a$, — statt $\delta y'$ und $\delta z'$ dagegen beziehlich die Koeffizienten von $x$ in der Entwicklung der Ausdrücke $[(y_x)_x]_{a_x}$ und $[(z_x)_x]_{a_x}$, gesetzt werden, so daß man hat

5) $\delta y' = \delta y_a + [\partial y_x]_a \cdot \delta a$

und 6) $\delta z' = \delta z_a + [\partial z_x]_a \cdot \delta a,$

wodurch die Gleichungen (3. und 4.) in

7) $(\partial\psi_{x'} + \partial\psi_{y'} \cdot \partial y_x + \partial\psi_{z'} \cdot \partial z_x) \cdot \delta a + \partial\psi_{y'} \cdot \delta y_a + \partial\psi_{z'} \cdot \delta z_a = 0$

8) $(\partial\psi'_{x'} + \partial\psi'_{y'} \cdot \partial y_x + \partial\psi'_{z'} \cdot \partial z_x) \cdot \delta a + \partial\psi'_{y'} \cdot \delta y_a + \partial\psi'_{z'} \cdot \delta z_a = 0$

übergehen. Aus der Gleichung (N. 9. der Aufgabe 12.) für $\delta V = 0$, müssen daher nun mittelst der hiesigen Gleichungen (7. u. 8.) und mittelst der Gleichungen (N. 8. der Aufgabe 12.) die Ausdrücke $\delta z_a$, $\delta y_a$ und $\delta z_b$ eliminirt werden, und dann zerfällt jene Gleichung $\delta V = 0$ (N. 9. der Aufgabe 12.) in die allgemeinen Gleichungen (I. u. II.) daselbst, in die Grenzgleichungen (III. u. IV.) daselbst, und in eine neue Grenzgleichung, welche deshalb noch erhalten wird, weil auch der jetzige Koeffizient von $\delta a$ der Null gleich seyn muß, und welche folgende ist:

$$(♀) \cdots (\partial\psi'_{y'} \cdot \partial\psi_z - \partial\psi_{y'} \cdot \partial\psi'_{z'}) + [\partial y_x]_a \cdot (\partial\psi'_{z'} \cdot \partial\psi_{x'} - \partial\psi_{z'} \cdot \partial\psi'_{x'}) + [\partial z_x]_a \cdot (\partial\psi'_{x'} \cdot \partial\psi_{y'} - \partial\psi_{x'} \cdot \partial\psi'_{z'}) = 0,$$

wenn nur in letzterer Gleichung, $a$, $y_a$, $z_a$ beziehlich statt $x'$, $y'$ und $z'$ und statt $x$, $y$, $z$ geschrieben werden.

Diese 3 Grenzgleichungen (III. IV. u. ♀), in Verbindung

mit den 3 Gleichungen

$$\psi_{a,y_a,z_a} = 0, \quad \psi'_{a,y_a,z_a} = 0 \text{ und } \varphi_{b,y_b,z_b} = 0,$$

dienen nun im Allgemeinen zur Bestimmung der 6 Unbekannten $c, c_1, c_2, c_3, b$ und $a$.

Zugleich erkennt man bald aus der Form der Gleichung (♀), daß diese als die Kürzeste gefundene gerade Linie auf der, sie in ihrem Anfange begrenzenden, durch $\psi = 0$ und $\psi' = 0$ gegebenen, (doppelt oder einfach gekrümmten oder geraden) Linie, senkrecht steht. *)

Anmerkung. Während aber in den Aufgaben (12.—16.) der Anfangs-Punkt der gesuchten kürzesten Linie und der nächsten Nachbarkurven, unter denen sie herausgesucht werden soll, den verschiedensten Bedingungen unterworfen worden ist, kann nun auch der Endpunkt denselben verschiedenen Bedingungen unterworfen werden, während der Anfangs-Punkt irgend einer dieser 5 Bedingungen unterworfen bleibt. Man würde also leicht außer den 5 Aufgaben (12—16.) zunächst noch 20 neue Aufgaben bilden können, in welchen immer die kürzeste Linie im Raume gesucht wird, jedoch unter immer auf's neue und wiederholt abgeänderten Grenzbedingungen. Und da diese Grenzbedingungen nur Abhängigkeiten zwischen den Grenz-Ausdrücken $\delta y_a$, $\delta y_b$, $\delta z_a$, $\delta z_b$, $\delta a$ und $\delta b$ selbst, nie aber Abhängigkeiten zwischen den Funktionen $\delta y$ und $\delta z$ aussprechen, so folgt dem Geiste der (§. §. 328—338. d. VI. Th. d. S.) gemäß, daß in allen diesen Aufgaben die allgemeinen Gleichungen (I. und II.) immer dieselben bleiben, daß man also immer zu den Gleichungen

$$y = c \cdot x + c_1 \quad \text{und} \quad z = c_2 \cdot x + c_3$$

geführt wird, d. h. immer zu der geraden Linie, während die

---

*) Man darf nur die Gleichung der Tangente an die durch $\psi = 0$ und $\psi' = 0$ gegebene Kurve suchen, und man wird in der Gleichung (♀) die Bedingung ausgesprochen finden, unter welcher nach dem (IV. Th. d. S. Anhang N. 31.) diese Tangente und diese kürzeste gerade Linie auf einander senkrecht stehen.

Konstanten $c$, $c_1$, $c_2$ und $c_3$ und die Abscissen a und b der Endpunkte dieser kürzesten Linie allemal aus den immer abgeänderten Grenzbedingungen auch eine immer abgeänderte Bestimmung erleiden, wenn sie nicht direkt gegeben sind.

Heben wir unter diesen so eben aufgezählten Aufgaben noch die hervor, wo unter allen Linien, welche dieselben Grenzpunkte haben, die Kürzeste herausgeholt werden soll; — so hat man in Bezug auf den Anfangspunkt genau die Bedingungen der Aufgabe (13.). Weil nun hier in Bezug auf den Endpunkt dieselben Bedingungen gemacht sind, so hat man nicht bloß, wie in der Aufgabe (13.), $\delta y_a = 0$, $\delta z_a = 0$ und $\delta a = 0$, sondern auch noch $\delta y_b = 0$, $\delta z_b = 0$ und $\delta b = 0$. Aus der Gleichung $\delta V = 0$ in (N. 9. der Aufgabe 12.) fallen nun alle Grenzglieder von selbst fort. Man erhält daher bloß die allgemeinen Gleichungen (I. und II.) für das Maximum und Minimum, welche zu

$$y = c \cdot x + c_1 \quad \text{und} \quad z = c_2 \cdot x + c_3$$

führen; während die 6 Unbekannten $c$, $c_1$, $c_2$, $c_3$, a und b durch neu hinzutretende Bedingungen, etwa dadurch, daß die beiden Grenzpunkte der gesuchten Linie, oder irgend zwei andere Punkte der Linie und noch a und b selbst, oder ähnliche Bedingungen gegeben sind, ihre nähere Bestimmung erhalten müssen. *)

Heben wir dagegen unter den vorhin gedachten Aufgaben

---

*) Würde man aber diese Aufgabe direkt behandeln, ohne sie als einen besondern Fall der Aufgabe (12.) anzusehen, so würde man nicht wie in (12.)

$$V_x = \int_{b_x \div a_x} \sqrt{1 + \partial(y_x)_x^2 + \partial(z_x)_x^2} \cdot dx,$$

sondern sogleich bloß

$$V_x = \int_{b \div a} \sqrt{1 + \partial(y_x)_x^2 + \partial(z_x)_x^2} \cdot dx$$

nehmen, so daß in $\delta V$ gar keine mit $\delta a$ und $\delta b$ behafteten Glieder erscheinen können. Dann braucht man natürlich auch nicht

$$\delta a = \delta b = 0$$

zu setzen, weil dann $\delta a$ und $\delta b$ selbst nun gar nicht vorhanden sind.

diese andere hervor, wo zwischen zweien auf der Axe der x senkrechten, vom Anfangspunkte der Koordinaten um a und um b entfernten, Ebenen die kürzeste Linie gesucht werden soll unter allen nächsten Nachbarkurven, welche zwischen diesen beiden Ebenen liegen, so hat man in Bezug auf den Anfangspunkt genau die Bedingungen der Aufgabe (14.). Weil aber hier in Bezug auf den Endpunkt dieselben Bedingungen gemacht sind, so hat man nicht bloß $\delta a = 0$, sondern auch $\delta b = 0$; die Gleichung $\delta V = 0$ (N. 9. der Aufgabe 12.) verliert also die beiden mit $\delta a$ und $\delta b$ behafteten Glieder, welche nun gar nicht erscheinen. Uebrigens zerfällt dieselbe Gleichung nun in die beiden allgemeinen Gleichungen des Maximi und Minimi, und noch in folgende 4 Grenzgleichungen, nämlich

$$[\partial y_x]_a = 0, \quad [\partial z_x]_a = 0, \quad [\partial y_x]_b = 0 \quad \text{und} \quad [\partial z_x]_b = 0,$$

welche letztere, weil $\partial y_x = c$, $\partial z_x = c_2$ ist, in die beiden

$$c = 0 \quad \text{und} \quad c_2 = 0$$

zusammenfallen. Die gesuchte kürzeste Linie ist daher durch die Gleichungen

$$y = c_1 \quad \text{und} \quad z = c_3$$

gegeben, ist demnach mit der Axe der x parallel, also auch senkrecht auf den beiden Grenzebenen und kann noch gezwungen werden, durch einen gegebenen Punkt hindurchzugehen, weil die Konstanten $c_1$ und $c_3$ noch unbestimmt geblieben sind.

Wir heben zuletzt von allen diesen hier erwähnten Aufgaben noch folgende hervor.

## Aufgabe 17.

(Zu §. §. 84—86. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Zwischen zweien durch die Gleichungen

$$\psi_{x',y',z'} = 0, \quad \psi'_{x',y',z'} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{x,y,z} = 0, \quad \varphi'_{x,y,z} = 0$$

gegebenen (einfach oder doppelt gekrümmten, oder geraden) Linien, die kürzeste Linie zu finden.

In dieser Aufgabe hat man für den Anfangspunkt genau

dieselben Bedingungen, wie in der Aufgabe (16.). Und weil die Bedingungen für den Endpunkt dasmal die analogen sind, so wird man in der Gleichung $\delta V = 0$ (N. 9. der Aufg. 12.) wiederum alle Glieder behalten; allein die $\delta y_a$, $\delta z_a$, $\delta a$, so wie die $\delta y_b$, $\delta z_b$ und $\delta b$ sind nun so von einander abhängig, wie solches für die ersteren 3 dieser Grenzfaktoren in der Aufgabe (16.) bereits auseinander gesetzt sich findet, nämlich durch die Gleichungen

1) $(\partial\psi_{x'} + \partial\psi_{y'} \cdot \partial y_x + \partial\psi_{z'} \cdot \partial z_x) \cdot \delta a + \partial\psi_{y'} \cdot \delta y_a + \partial\psi_{z'} \cdot \delta z_a = 0$

2) $(\partial\psi'_{x'} + \partial\psi'_{y'} \cdot \partial y_x + \partial\psi'_{z'} \cdot \partial z_x) \cdot \delta a + \partial\psi'_{y'} \cdot \delta y_a + \partial\psi'_{z'} \cdot \delta z_a = 0,$

wenn hier durchweg $a$, $y_a$, $z_a$ beziehlich statt $x'$, $y'$, $z'$ gesetzt werden; und durch die Gleichungen

3) $(\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y_x + \partial\varphi_z \cdot \partial z_x) \cdot \delta b + \partial\varphi_y \cdot \delta y_b + \partial\varphi_z \cdot \delta z_b = 0$

4) $(\partial\varphi'_x + \partial\varphi'_y \cdot \partial y_x + \partial\varphi'_z \cdot \partial z_x) \cdot \delta b + \partial\varphi'_y \cdot \delta y_b + \partial\varphi'_z \cdot \delta z_b = 0,$

wenn hier überall $b$, $y_b$, $z_b$ beziehlich statt $x$, $y$, $z$ gesetzt werden. Mittelst dieser 4 Gleichungen (1—4.) muß man nun aus $\delta V = 0$ der (N. 9. der Aufgabe 12.) die 4 abhängigen Faktoren $\delta y_b$, $\delta z_b$, $\delta y_a$, $\delta z_a$ eliminiren, und dieselbe Gleichung $\delta V = 0$ wird dann zerfallen erstlich in die beiden allgemeinen Gleichungen (I. u. II. der Aufgabe 12.) und in noch folgende zwei Grenzgleichungen, welche aus den Koeffizienten der unabhängigen $\delta a$ und $\delta b$ hervorgehen, indem man solche $= 0$ setzt, nämlich

$$(\odot)\cdots \quad \left\{\begin{array}{l} (\partial\psi'_{y'} \cdot \partial\psi_{z'} - \partial\psi_{y'} \cdot \partial\psi'_{z'}) \\ +(\partial\psi'_{z'} \cdot \partial\psi_{x'} - \partial\psi_{z'} \cdot \partial\psi'_{x'}) \cdot [\partial y_x]_a \\ +(\partial\psi'_{x'} \cdot \partial\psi_{y'} - \partial\psi_{x'} \cdot \partial\psi'_{y'}) \cdot [\partial z_x]_a \end{array}\right\} = 0,$$

wenn unter $x'$, $y'$, $z'$ beziehlich $a$, $y_a$, $z_a$ verstanden werden;

$$(\mathbb{C})\cdots \quad \left\{\begin{array}{l} (\partial\varphi'_y \cdot \partial\varphi_z - \partial\varphi_y \cdot \partial\varphi'_z) \\ +(\partial\varphi'_z \cdot \partial\varphi_x - \partial\varphi_z \cdot \partial\varphi'_x) \cdot [\partial y_x]_b \\ +(\partial\varphi' \cdot \partial\varphi_y - \partial\varphi_x \cdot \partial\varphi'_y) \cdot [\partial z_x]_b \end{array}\right\} = 0,$$

wenn unter $x$, $y$, $z$ durchaus $b$, $y_b$, $z_b$ verstanden werden.

Diese beiden Gleichungen (⊙ und ℂ) in Verbindung mit den 4 Gleichungen

$$\psi_{a,y_a,z_a}=0,\quad \psi'_{a,y_a,z_a}=0,\quad \varphi_{b,y_b,z_b}=0 \text{ und } \varphi'_{b,y_b,z_b}=0$$

dienen nun im Allgemeinen zur Bestimmung der 6 Unbekannten $a$, $b$, $c$, $c_1$, $c_2$ und $c_3$.

Diese kürzeste Linie, wie aus der Form der Grenzgleichungen (⊙ und ℂ) hervorgeht, steht auf beiden gegebenen Grenzkurven senkrecht. (Vgl. Aufgabe 16.)

Anmerkung. Wesentlicher verschieden von allen diesen Aufgaben (12.—17.) und von den in der Anmerkung zur Aufgabe (16.) noch erwähnten, ist dagegen folgende

## Aufgabe 18.

(Zu §. 87. 88. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Auf einer gegebenen Fläche

1) $$F_{x,y,z}=0$$

wird zwischen zwei andern gegebenen Flächen

2) $\psi_{x',y',z'}=0$ und 3) $\varphi_{x,y,z}=0$

die kürzeste Linie gesucht.

Man hat hier zwar V, $V_x$ und $\delta V$ wiederum genau so, wie in der Aufgabe (12.), nämlich

4) $$V=\int_{b\div a}\sqrt{1+\partial y_x{}^2+\partial z_x{}^2}\cdot dx;$$

5) $$V_x=\int_{b_x\div a_x}\sqrt{1+\partial (y_x)_x{}^2+\partial (z_x)_x{}^2}\cdot dx$$

und

$$6)\quad \delta V = -\int_{b\div a}\left\{\begin{array}{l}\partial\left(\dfrac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}\right)\cdot\delta y\\ +\partial\left(\dfrac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}\right)\cdot\delta z\end{array}\right\}\cdot dx$$

$$+\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}\right]_b\cdot\delta y_b-\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}\right]_a\cdot\delta y_a$$

$$+\left[\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}\right]_b\cdot\delta z_b-\left[\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}\right]_a\cdot\delta z_a$$

$$+\left[\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}\right]_b\cdot\delta b-\left[\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}\right]_a\cdot\delta a;$$

allein die Gleichung $\delta V = 0$ zerfällt dasmal ganz anders, weil dasmal die Funktionen $\delta y$ und $\delta z$ noch von einander abhängig sind. Da nämlich die nächsten Nachbarkurven, unter denen die kürzeste gesucht wird, alle in der gegebenen Fläche $F_{x,y,z} = 0$ liegen müssen, so hat man noch

$$(\mathfrak{C})\cdots\quad F_{x,y_x,z_x} = 0,\quad \text{also auch}\quad \partial F_y\cdot\delta y+\partial F_z\cdot\delta z = 0.$$

Ferner müssen, weil dasmal die gesuchte Linie wiederum, wie in der Aufgabe (17.), von zweien durch die Gleichungen

$$\psi_{x',y',\delta'} = 0,\quad F_{x',y',\delta'} = 0\quad \text{und}\quad \varphi_{x,y,\delta} = 0,\quad F_{x,y,\delta} = 0$$

gegebenen Kurven begrenzt seyn sollen, *) die Koordinaten $x$, $y_x$, $z_x$,

beziehlich statt $\left\{\begin{array}{l}\xi',\ \eta',\ \zeta'\ \text{in}\ \psi=0\\ x,\ y,\ z\ \text{in}\ F=0\end{array}\right\}$

und statt $\left\{\begin{array}{l}\xi,\ \eta,\ \zeta\ \text{in}\ \varphi=0\\ x,\ y,\ z\ \text{in}\ F=0\end{array}\right\}$

substituirt, auch diesen 4 Gleichungen genügen; so daß man hier wiederum die Gleichungen (1.—4.) der Aufgabe (17.) hat, welche aber jetzt folgende werden:

---

*) Nämlich von den Durchschnittslinien, welche die Flächen

$$\psi_{x',y',\delta'} = 0\quad \text{und}\quad \varphi_{x,y,\delta} = 0$$

mit der Fläche $F_{x,y,z} = 0$ gemein haben.

7) $(\partial\psi_{x'}+\partial\psi_{y'}\cdot\partial y_x+\partial\psi_{z'}\cdot\partial z_x)\cdot\delta a+\partial\psi_{y'}\cdot\delta y_a+\partial\psi_{z'}\cdot\delta z_a=0$

8) $(\partial F_x+\partial F_y\cdot\partial y_x+\partial F_z\cdot\partial z_x)\cdot\delta a+\partial F_y\cdot\delta y_a+\partial F_z\cdot\delta z_a=0,$

wenn in diesen beiden Gleichungen $a$, $y_a$, $z_a$ beziehlich statt $x'$, $y'$, $z'$ und statt $x$, $y$, $z$ gesetzt werden; — und

9) $(\partial\varphi_x+\partial\varphi_y\cdot\partial y_x+\partial\varphi_z\cdot\partial z_x)\cdot\delta b+\partial\varphi_y\cdot\delta y_b+\partial\varphi_z\cdot\delta z_b=0$

10) $(\partial F_x+\partial F_y\cdot\partial y_x+\partial F_z\cdot\partial z_x)\cdot\delta b+\partial F_y\cdot\delta y^b+\partial F_z\cdot\delta z_b=0,$

wenn in diesen letztern beiden Gleichungen $b$, $y_b$, $z_b$ beziehlich statt $x$, $y$, $z$ und statt $x$, $y$, $z$ subſtituirt werden. *)

Man muß daher nun aus $\delta V=0$ erstlich die Funktion $\delta z$, dann aber auch noch $\delta z_a$, $\delta z_b$, so wie noch $\delta y_a$ und $\delta y_b$ eliminiren; und man erhält dann, statt $\delta V=0$, jetzt

11)
$$0=\int_{b\div a}\left\{\begin{array}{l}\partial\left(\dfrac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x{}^2+\partial z_x{}^2}}\right)\\ -\dfrac{\partial F_y}{\partial F_z}\cdot\partial\left(\dfrac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x{}^2+\partial z_x{}^2}}\right)\end{array}\right\}\cdot\delta y\cdot dx$$
$$+[\partial F_y\cdot\partial\varphi_z-\partial\varphi_y\cdot\partial F_z+\partial y_x\cdot(\partial F_z\cdot\partial\varphi_x-\partial\varphi_z\cdot\partial F_x)$$
$$+\partial z_x\cdot(\partial F_x\cdot\partial\varphi_y-\partial\varphi_x\cdot\partial F_y)]_b\cdot\delta b$$
$$+[\partial F_y\cdot\partial\psi_{z'}-\partial\psi_{y'}\cdot\partial F_z+\partial y_x\cdot(\partial F_z\cdot\partial\psi_{x'}-\partial\psi_{z'}\cdot\partial F_x)$$
$$+\partial z_x\cdot(\partial F_x\cdot\partial\psi_{y'}-\partial\psi_{x'}\cdot\partial F_y)]_a\cdot\delta a,$$

---

*) Es folgt aus $F_{x,y,z}=0$, wenn man nach allem $x$ differenziirt,

(♂)··· $\partial F_x+\partial F_y\cdot\partial y_x+\partial F_z\cdot\partial z_x=0,$

man mag statt $x$ setzen was man nur immer will, wenn man nur statt $y$, $z$, beziehlich die zugehörigen $y_x$ und $z_x$ setzt. Also findet die Gleichung (♂) auch statt, wenn man $a$, $y_a$, $z_a$ statt $x$, $y$, $z$, und auch wenn man $b$, $y_b$, $z_b$ statt $x$, $y$ $z$ subſtituirt. Deshalb lassen sich diese Gleichungen (8. u. 10.) viel einfacher schreiben, nämlich so:

8) $\partial F_y\cdot\delta y_a+\partial F_z\cdot\delta z_a=0$

10) $\partial F_y\cdot\delta y_b+\partial F_z\cdot\delta z_b=0;$

und sind beide bereits in der Gleichung (♂) enthalten, d. h. in

$$\partial F_y\cdot\delta y+\partial F_z\cdot\delta z=0,$$

wenn man in letzterer abwechselnd $a$, dann $b$, statt jedes explizit und implizit vorkommenden $x$ setzt.

wo die Bezeichnung auszudrücken hat, daß in der vorletzten Zeile beziehlich $b$, $y_b$, $z_b$ statt $x$, $y$, $z$ und statt $x$, $y$, $z$ gesetzt werden soll, in der letzteren Zeile dagegen $a$, $y_a$, $z_a$ statt beziehlich $x'$, $y'$, $z'$ und statt beziehlich $x$, $y$, $z$ stehen muß.

Dies giebt aber statt der beiden frühern Gleichungen (I. u. II. der Aufgabe 12.), jetzt nur die einzige Gleichung

$$(A)\cdots\quad \partial F_z\cdot\partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right)-\partial F_y\cdot\partial\left(\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right)=0,$$

welche in Verbindung mit der gegebenen Gleichung

$$1)\qquad F_{x,y,z}=0$$

nach (§. 281. d. V. Th. d. S.) $y_x$ und $z_x$ mit zwei willkührlichen Konstanten liefert. — Zur Bestimmung dieser beiden Konstanten, so wie noch der unbekannten Grenz-Abscissen $a$, $b$ hat man aber zunächst die beiden Gleichungen, welche noch in $\delta V=0$, d. h. welche noch in der Gleichung (11.) enthalten sind, und welche dadurch sich ergeben, daß man die Koeffizienten von $\delta a$ und $\delta b$ einzeln der Null gleich setzt; und dann noch die beiden Gleichungen $\psi_{x',y',z'}=0$ und $\varphi_{x,y,z}=0$, wenn in vorletzterer $a$, $y_a$, $z_a$ statt $x'$, $y'$, $z'$, in letzterer dagegen $b$, $y_b$, $z_b$ statt $x$, $y$, $z$ gesetzt wird.

Ist z. B. die gegebene Fläche $F=0$ eine Kugel, deren Gleichung

$$1)\qquad x^2+y^2+z^2=r^2$$

ist, so daß man

$$F=x^2+y^2+z^2-r^2,\quad \partial F_y=2y\quad\text{und}\quad \partial F_z=2z$$

hat, so wird die allgemeine Gleichung (A.) des Maximi und Minimi jetzt diese:

$$2)\qquad z\cdot\partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right)-y\cdot\partial\left(\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right)=0,$$

welche man auch in dieser andern Form

$$3)\qquad \sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}\cdot(z\cdot\partial^2 y_x-y\cdot\partial^2 z_x)$$
$$-\partial\left(\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}\right)_{(x)}\cdot(z\cdot\partial y_x-y\cdot\partial z_x)=0$$

und auch noch in dieser Form

4) $(1+\partial y_x^2+\partial z_x^2)\cdot(z\cdot\partial^2 y_x - y\cdot\partial^2 z_x)$
$-(\partial y_x\cdot\partial^2 y_x+\partial z_x\cdot\partial^2 z_x)\cdot(z\cdot\partial y_x - y\cdot\partial z_x) = 0$

hinstellen kann.

## Integration dieser beiden Gleichungen (1. und 2.).

Und um diese Gleichungen (1. und 2.) nach dem Verfahren des (§. 281. oder §. 282. Anmerkg. 1. d. V. Th. d. S.) zu integriren, muß man jener Vorschrift gemäß, zuvor die Gleichung (1.) zweimal hinter einander nach allem x differenziiren, so daß man erhält:

5) $x+y\cdot\partial y_x+z\cdot\partial z_x = 0$

und 6) $1+\partial y_x^2+\partial z_x^2+y\cdot\partial^2 y_x+z\cdot\partial^2 z_x = 0;$

dann aber aus den 4 Gleichungen (1. 2. 5. und 6.) sowohl $z$, als auch $\partial z_x$ und $\partial^2 z_x$ eliminiren; und man wird eine Differenzialgleichung der 2ten Ordnung bloß zwischen $x$, $y$, $\partial y_x$ und $\partial^2 y_x$ erhalten, welche zuletzt noch integrirt werden muß, um $y$ in $x$ nebst zweien willkührlichen Konstanten zu geben. Nachgehends müßte man diesen Werth statt $y$ in die Gleichung (1.) substituiren, um dann auch $z$ noch in $x$ und in dieselben beiden Konstanten ausgedrückt zu haben.

Weil aber diese Rechnungen nicht ohne große Weitläufigkeiten bleiben, so kann man lieber versuchen, die Gleichung (2.) als totale Gleichung zwischen $x$, $y$ und $z$, mittelst eines integrirenden Faktors (nach §. 395. d. VI. Th. d. S.) zu integriren, also das im (§. 399. d. VI. Th. d. S.) beschriebene Verfahren anzuwenden. Betrachtet man die verschiedenen Formen, welche die Gleichung (2.) annehmen kann, giebt man ihr z. B die Form (3.), und bemerkt man, daß $z\cdot\partial^2 y_x - y\cdot\partial^2 z_x$ nichts anders, als die Ableitung von $z\cdot\partial y_x - y\cdot\partial z_x$ nach allem $x$ ist, so wird man

$$\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2} = u, \qquad z\cdot\partial y_x - y\cdot\partial z_x = v$$

setzen, und die Gleichung (3.) wird nun diese:

$$u\cdot\partial v - v\cdot\partial u = 0;$$

sie wird also integrabel, wenn man sie mit dem integrirenden Faktor $\frac{1}{u\cdot v}$ multiplizirt; sie giebt, integrirt,

7) $$\frac{z\cdot\partial y_x - y\cdot\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}} = c,$$

welche Gleichung eine willkührliche Konstante $c$ in sich aufgenommen

hat, eine Differenzialgleichung der 1sten Ordnung ist, und in Verbindung mit der (1.), sowohl z als y, in x ausgedrückt, noch zu liefern hat.

Um nun aus den Gleichungen (1. u. 7.) z und y in x ausgedrückt zu finden, kann man wieder das Verfahren des (§. 281. d. V. Th. d. S.) eintreten lassen, also aus den Gleichungen (1. 5. und 7.) sowohl z als $\partial z_x$ eliminiren, so daß man eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen x, y und $\partial y_x$ erhält, die dann noch integrirt werden muß, so daß durch diese Integration die 2te Konstante eingeführt wird.

Weil aber auch diese letztern Rechnungen noch ziemlich weitläufig werden, so wird man lieber die Gleichungen (1. und 2.) dergestalt mit einander zu kombiniren suchen, daß nochmals eine totale Differenzialgleichung zwischen allen 3 Veränderlichen entsteht, welche integrabel ist, so daß noch eine neue Gleichung zwischen x, y und z sich ergiebt.

Denkt man nämlich daran, daß $\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}$ nichts anders als die Ableitung des Bogens s der gesuchten Kurve ist, nach x genommen, und denkt man sich, um den Rechnungen mehr Gleichförmigkeit zu geben, x selber wieder als Funktion irgend eines neuen Veränderlichen t, so kann man der Gleichung (2.) die Form geben

$$2') \qquad z\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)-y\cdot\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=0,$$

während die Gleichungen (5.) und (6.) jetzt die Form

$$5') \qquad x\cdot\partial x+y\cdot\partial y+z\cdot\partial z=0$$

$$6') \qquad \partial x^2+\partial y^2+\partial z^2+x\cdot\partial^2 x+y\cdot\partial^2 y+z\cdot\partial^2 z=0$$

annehmen, und noch überdieß

$$8) \qquad \partial x^2+\partial y^2+\partial z^2=\partial s^2$$

ist, wenn man nur jetzt alle $\partial$ auf den neuen Veränderlichen t bezieht. — Dann folgt aus der Gleichung (8.)

$$9) \qquad \frac{\partial x^2}{\partial s^2}+\frac{\partial y^2}{\partial s^2}+\frac{\partial z^2}{\partial s^2}=1,$$

und wenn man diese nach allem t differenziirt,

$$10) \qquad \frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=0,$$

Findet man nun aus der (5'.) $\frac{\partial z}{\partial s}$, nämlich

$$11) \qquad \frac{\partial z}{\partial s}=-\frac{x}{z}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}-\frac{y}{z}\cdot\frac{\partial y}{\partial s},$$

und substituirt man diesen Werth statt des Faktors $\frac{\partial z}{\partial s}$, in so weit er nicht noch unter dem $\partial$ Zeichen vorkommt, in die Gleichung (10.), so verwandelt sich diese Gleichung (10.) in

12) $$\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\left(\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)-\frac{x}{z}\cdot\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\right)+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\left(\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)-\frac{y}{z}\cdot\partial\frac{\partial z}{\partial s}\right)=0,$$

d. h. weil hier der zweite Theil Null wird, vermöge der Gleichung (2′.), in

13) $$z\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)-x\cdot\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=0.$$

Da nun diese Gleichung (13.) analog der Gleichung (2′.) ist, und man von der Gleichung (2′.) das Integral (7.) hat, welches jetzt so geschrieben werden kann:

7′) $$z\cdot\frac{\partial y}{\partial s}-y\cdot\frac{\partial z}{\partial s}=c,$$

so wird man auch von der (13.) auf demselben Wege das Integral

14) $$z\cdot\frac{\partial x}{\partial s}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial s}=c_1$$

erhalten, wo $c_1$ eine zweite willkührliche Konstante ist. — Eliminirt man nun aus diesen beiden ersten Integralen (7′ und 14.) den Ausdruck $\partial s$, so erhält man, wenn noch m statt $\frac{c}{c_1}$ gesetzt wird,

15) $$z\cdot\partial y-y\cdot\partial z=m\cdot(z\cdot\partial x-x\cdot\partial z),$$

wo m eine willkührliche Konstante ist. Diese Gleichung ist nun aber wieder als eine totale Gleichung zwischen 3 Veränderlichen integrabel. Multiplizirt man sie nämlich mit dem integrirenden Faktor $\frac{1}{z^2}$, so erhält man, wenn links und rechts die Integrale genommen werden,

16) $$\frac{y}{z}=m\cdot\frac{x}{z}+n \quad \text{oder} \quad y=m\cdot x+n\cdot z,$$

wo n eine zweite willkührliche Konstante ist.

Die beiden Urgleichungen (1. u. 16.) geben nun y und z in x auf gemeinem algebraischem Wege, und die Integration der Gleichungen (1. u. 2.) ist durchgeführt.

## Weitere Fortsetzung der Aufgabe.

Nachdem die allgemeine Gleichung (2.) des Maximums und Minimums in Verbindung mit der (1.) integrirt ist, und man nun die beiden Ur-Gleichungen

1) $$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

und 16) $$y = m\cdot x+n\cdot z$$

zur Bestimmung von y und z in x gefunden hat, so bleibt noch übrig, die Konstanten m und n zu bestimmen *)

Sind nun noch statt der Gleichungen

$$\psi_{x',y',z'} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{x,y,z} = 0,$$

die Gleichungen der beiden Ebenen

---

*) Die Gleichung (16.) ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Koordinaten, also durch den Mittelpunkt der Kugel hindurchgeht. Die beiden Gleichungen (1. u. 16.) entsprechen also einem größten Kreise der Kugel, dessen spezielle Lage noch von der Bestimmung der beiden Konstanten m und n abhängt.

Daß auf der Kugelfläche der größte Kreisbogen zwischen zwei Punkten allemal kleiner sey, als jeder kleinere Kreisbogen derselben, der zwischen denselben beiden Punkten liegt, ist eine in den Elementen der Geometrie leicht zu erweisende und in denselben längst gekannte Eigenschaft der Kugeloberfläche. Es ließ sich daher auch hier schon im Voraus vermuthen, daß man einen größten Kreis der Kugel für die gesuchte Kurve erhalten werde. Und diese Vermuthung konnte wieder gerade zu dem Integrations-Verfahren hinführen, welches wir hier oben zuletzt haben eintreten lassen, um zu der Gleichung der Ebene zu gelangen. — Dabei kann man noch bemerken, daß

$$\frac{\partial x}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial s}$$

beziehlich die Kosinusse sind der Winkel $\alpha, \beta, \gamma$, welche die Tangente an dem Bogen (bei dem Punkte x, y, z) mit den 3 Axen (der x, der y und der z) macht, oder mit den 3 Geraden, welche durch den Punkt (x, y, z) mit den 3 Axen parallel gedacht werden können. Das Integral (7'.) der Gleichung (2'.) läßt sich daher so schreiben

$$z\cdot Cos\,\beta - y\cdot Cos\,\gamma = c,$$

und es ließ sich deßhalb vermuthen, daß noch zwei solche Gleichungen existiren müssen, nämlich

$$z\cdot Cos\,\alpha - x\cdot Cos\,\gamma = c_1$$

und

$$y\cdot Cos\,\alpha - x\cdot Cos\,\beta = c_2.$$

Das Integral (14.) ist nun die erstere dieser beiden Gleichungen, auf welches Integral daher, hegte man einmal diese Vermuthungen, leicht hingearbeitet werden konnte.

17) $\mathfrak{z}' + a_1 \cdot \mathfrak{y}' + a_2 \cdot \mathfrak{x}' + a_3 = 0$ und 18) $\mathfrak{z} + b_1 \cdot \mathfrak{y} + b_2 \cdot \mathfrak{x} + b_3 = 0$

gegeben, welche in Verbindung mit

19) $\mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2 + \mathfrak{z}'^2 = r^2$ und 20) $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = r^2$

wiederum zwei Kugelkreise liefern, so hat man zur Bestimmung der beiden Konstanten m und n, dann der 6 Grenzkoordinaten

$$a,\ y_a,\ z_a,\ b,\ y_b,\ z_b$$

(der Endpunkte der gesuchten Kurve) die 8 Gleichungen, nämlich die Gleichungen (17—20.), ferner die beiden Gleichungen

$$y_a = m \cdot a + n \cdot z_a \quad \text{und} \quad y_b = m \cdot b + n \cdot z_b,$$

welche aus der (16.) hervorgehen, und noch die beiden Grenzgleichungen, welche aus $\delta V = 0$ dadurch hervorgehen, daß man die Koeffizienten von $\delta b$ und $\delta a$ einzeln gleich Null setzt, nämlich die beiden Gleichungen *)

21) $(y_b - b_1 \cdot z_b) + [\partial y_x]_b \cdot (b_2 \cdot z_b - b) + [\partial z_x]_b \cdot (b_1 \cdot b - b_2 \cdot y_b) = 0$

22) $(y_a - a_1 \cdot z_a) + [\partial y_x]_a \cdot (a_2 \cdot z_a - a) + [\partial z_x]_a \cdot (a_1 \cdot a - a_2 \cdot y_a) = 0,$

wenn man nur vorher aus diesen letztern beiden Gleichungen die Werthe $[\partial y_x]_a$, $[\partial z_x]_a$, $[\partial y_x]_b$ und $[\partial z_x]_b$ mittelst der Gleichungen

23) $$x + y \cdot \partial y_x + z \cdot \partial z_x = 0$$

und

24) $$\partial y_x = m + n \cdot \partial z_x,$$

welche aus (1. u 16.) dadurch hervorgehen, daß man sie nach allem x differenziirt, nachdem man in letzteren abwechselnd a und b statt jedes x gesetzt hat, so daß die 4 Gleichungen

25) $a + y_a \cdot [\partial y_x]_a + z_a \cdot [\partial z_x]_a = 0$, 26) $b + y_b \cdot [\partial y_x]_b + z_b \cdot [\partial z_x]_b = 0$

27) $[\partial y_x]_a = m + n \cdot [\partial z_x]_a$ 28) $[\partial y_x]_b = m + n \cdot [\partial z_x]_b$

daraus hervorgehen, eliminirt; zuletzt aber beziehlich

| | | |
|---|---|---|
| | $a,\ y_a,\ z_a,$ | $b,\ y_b,\ z_b$ |
| statt | $x',\ y',\ z',$ | $\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z}$ |

schreibt. **)

---

*) Es ist nämlich nun, weil $F = x^2 + y^2 + z_2 - r^2$ ist,

$$\partial F_x = 2x, \qquad \partial F_y = 2y, \qquad \partial F_z = 2z;$$

ferner $\partial \psi_{x'} = a_2$, $\partial \psi_{y'} = a_1$, $\partial \psi_{\delta'} = 1$

und $\partial \varphi_x = b_2$, $\partial \varphi_y = b_1$, $\partial \varphi_\delta = 1$.

**) Man kann auch aus den Gleichungen (1. u. 16.) und aus ihren

Wir wissen aber schon aus dem vorangegangenen Texte der allgemeinen Aufgabe, daß diese zwischen zwei gegebenen Kugelkreisen gesuchte kürzeste Linie auf der Kugel (nicht bloß ein größter Kreis der Kugel ist, sondern auch) auf den beiden Grenzkugelkreisen senkrecht steht.

## Aufgabe 19.

(Zu §. §. 87. 88. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Sucht man auf der gegebenen Fläche

$$F_{x,y,z} = 0$$

die kürzeste Linie zwischen zweien zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen und gegebenen, auf der Axe der x senkrechten, Ebenen, so hat man wiederum V wie in der vorstehenden Aufgabe, nämlich

$$V = \int_{b\div a} \sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}\cdot dx;$$

dagegen ist jetzt $V_x$ anders, nämlich

$$V_x = \int_{b\div a} \sqrt{1+\partial (y_x)_x^2+\partial (y_x)_x^2}\cdot dx.$$

Folglich ist auch jetzt $\delta V$ etwas andres als vorher, nämlich um die beiden mit $\delta a$ und $\delta b$ affizirten Glieder einfacher als der Ausdruck (Nr. 6. der Aufgabe 18.). Aber eben weil diese Aenderung des $\delta V$ nur dessen Grenzglieder betrifft, so bleibt wie-

---

Ableitungen nach allem x, nämlich aus den Gleichungen (23. und 24.), zuerst $y$, $z$, $\partial y_x$ und $\partial z_x$ als Funktionen von x allein finden, dann aber in diesen gefundenen Werthen einmal a, dann auch b, statt x schreiben, und man hat dann schon die Werthe $y_a$, $z_a$, $[\partial y_x]_a$ und $[\partial z_x]_a$ in a, m und n ausgedrückt; desgleichen aber auch schon die Werthe $y_b$, $z_b$, $[\partial y_x]_b$ und $[\partial z_x]_b$ in b, m und n ausgedrückt. Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichungen (21. und 22.), so wie noch in die Gleichungen (17. und 18.), nachdem man letzteren zuvor diese Form

$$z_a+a_1\cdot y_a+a_2\cdot a+a_3 = 0 \quad \text{und} \quad z_b+b_1\cdot y_b+b_2\cdot b+b_3 = 0$$

gegeben hat, so wird man 4 Gleichungen zur Bestimmung der 4 Unbekannten m, n, a und b haben. Ist aber a und b, m und n gefunden, so hat man dann auch die Werthe

$$y_a,\ z_a,\ [\partial y_x]_a,\ [\partial z_x]_a,\ y_b,\ z_b,\ [\partial y_x]_b \text{ und } [\partial z_x]_b.$$

derum die allgemeine Gleichung des Maximi und Minimi genau dieselbe, wie die (A.) in der vorhergehenden Aufgabe (18.), während man noch die Grenzgleichung

$$1)\quad \left.\begin{aligned}&\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right]_b\cdot\delta y_b-\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right]_a\cdot\delta y_a\\&+\left[\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right]_b\cdot\delta z_b-\left[\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right]_a\cdot\delta z_a\end{aligned}\right\}=0$$

hat, die nun nach den übrigen Nebenbedingungen der Aufgabe weiter noch zerfällt. Weil jedoch sowohl die gesuchte Kurve $(x, y_x, z_x)$, als auch die Nachbarkurven $(x, (y_\varkappa)_x, (z_\varkappa)_x)$ zwischen den beiden Kurven liegen, welche die beiden auf der Axe der x senkrecht stehenden und vom Anfangspunkte der Koordinaten um a und um b entfernten Ebenen mit der gegebenen Fläche $F_{x,y,z}=0$ bilden, so hat man nicht nur zwischen $\delta y$ und $\delta z$ im allgemeinen die Gleichung

$$\partial F_y\cdot\delta y+\partial F_z\cdot\delta z=0,$$

wie dies schon in der Aufgabe (18.) nachgewiesen wurde, sondern es gelten diese Gleichungen auch in's besondere noch an den Grenzen, d. h. man hat noch die beiden Gleichungen

$$2)\quad [\partial F_y]_a\cdot\delta y_a+[\partial F_z]_a\cdot\delta z_a=0$$

und $$3)\quad [\partial F_y]_b\cdot\delta y_b+[\partial F_z]_b\cdot\delta z_b=0,$$

wo $[\partial F_y]_a$ das bedeutet, was aus $\partial F_y$ als Funktion von x, y und z wird, wenn statt eines jeden explizit oder implizit stehenden x jetzt a geschrieben wird, so daß nicht bloß a statt x, sondern auch $y_a$ statt y und $z_a$ statt z zu stehen kommt, und wo die übrigen Bezeichnungen im analogen Sinne zu verstehen sind.

Nachdem aber die Abhängigkeiten zwischen den Grenzfaktoren $\delta y_a$, $\delta z_a$, $\delta y_b$ und $\delta z_b$ festgestellt sind, so kann man nun aus den 3 Gleichungen (1—3.) zwei dieser Faktoren eliminiren. *)

---

*) Das Eliminiren kann hier immer am bequemsten mittelst der

In der hervorgehenden Gleichung bleiben dann die beiden andern dieser Grenzfaktoren ganz willkührlich, und die Gleichung zerfällt daher noch in zwei Gleichungen, welche im Allgemeinen zur Bestimmung der beiden, durch die Integration der (A.) eingehenden, willkührlichen Konstanten dienen werden.

Anmerkg. Uebrigens steckt die Lösung dieser Aufgabe (19.) in der Lösung der vorigen (18.). Weil nämlich dasmal $a = a_x$, $b = b_x$ bleibt, so hat man dasmal $\delta a = \delta b = 0$. Statt der Gleichungen

$$\psi_{x',y',z'} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{x,y,z} = 0$$

hat man dasmal die Gleichungen der Ebenen, welche die Kurven begrenzen, nämlich die Gleichungen

$$1 \cdot x' + 0 \cdot y' + 0 \cdot z' = a \quad \text{und} \quad 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = b.$$

Für diese Werthe von $\psi$, $\varphi$, $\delta a$ und $\delta b$ geht aber die Auflösung der (18.) in die Auflösung der (19.) über.

## Aufgabe 20.

(Zu §. §. 87. 88. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Soll auf der gegebenen Fläche $F = 0$ die kürzeste Linie unter allen denen nächsten Nachbarkurven gefunden werden, welche mit ihr durch dieselben Endpunkte hindurchgehen (es mögen diese letzteren gegeben seyn oder nicht), so hat man wiederum, wenn man von dem Verfahren der Aufgabe (18.) ausgeht,

$$\delta a = \delta b = 0,$$

aber auch noch

$$\delta y_a = \delta z_a = \delta y_b = \delta z_b = 0.$$

Die allgemeine Gleichung (A.) der Aufgabe (18.) bleibt wiederum dieselbe; die Grenzgleichung ist aber von selbst erfüllt.

---

französischen Methode geschehen (I. Th. d. S. §. 223.), welche darin besteht, daß man die Gleichungen mit unbestimmten Multiplikatoren $\lambda$, $\lambda'$ ꝛc. multiplizirt, dann addirt, zuletzt aber die $\lambda$, $\lambda'$, ꝛc. so bestimmt sich denkt, daß die Koeffizienten der zu eliminirenden Unbekannten der Null gleich werden, letztere also herausfallen.

Die beiden eingehenden willkührlichen Konstanten müssen daher noch aus den übrigen Nebenbedingungen der Aufgabe bestimmt werden, etwa dadurch, daß die beiden Endpunkte der gesuchten Kurve auf der Fläche $F = 0$ gegeben sind, oder andere 2 Punkte, oder irgend andere ähnliche Bedingungen.

Anmerkung. Wir halten es für überflüssig, die Aufgabe (18.) mit allen möglichen abgeänderten Grenzbedingungen so zu wiederholen, wie solches mit der Aufgabe (12.) geschehen ist. Deshalb wollen wir nun sogleich zu einer neuen Gattung von Aufgaben übergehen.

## Aufgabe 21.

(Zu §. §. 89—91. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

In einer vertikalen Ebene sind zwei Punkte A und B (Fig. 7.) gegeben. Man soll die Kurve der festen Bahn AMB finden, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt, unter der Voraussetzung, daß ein Mittel im Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit entgegensteht, dagegen die Reibung nicht mit in Betracht kommen soll.

Es sey die Abscissen-Axe OX horizontal, die Ordinaten-Axe OY dagegen vertikal; die Schwere sey g; x und y seyen die Koordinaten eines beliebigen Punktes M der Kurve, so daß $OM_1 = MM_2 = x$, $OM_2 = MM_1 = y$ ist. — Ferner seyen $OA_1 = AA_2 = a$ und $OB_1 = BB_2 = b$ die Abscissen der gegebenen Punkte A und B, so sind $y_a$ und $y_b$ die gegebenen Ordinatenwerthe $AA_1$ und $BB_1$ derselben Punkte. Die Geschwindigkeit an dem Punkte M sey $= v$, und die Kraft des Widerstandes $= m \cdot v^2$, wo m irgend eine Konstante ist.

Endlich bezeichne N die in der Richtung MV normal auf die Tangente MT gedachte Kraft, welche in der Dynamik an die Stelle der festen Bahn gesetzt zu werden pflegt, und welche dem Drucke gleich kommt, den die Bahn selbst auszuhalten hat. Denkt man sich nun MX', MY' mit den Axen parallel, so sind, wenn s

den Bogen bis M bedeutet, und wenn sich die ∂ alle auf einen beliebigen unabhängigen Veränderlichen beziehen, der hier die Zeit t seyn mag,

$$-\frac{\partial x}{\partial s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial s}$$

die Kosinusse der Winkel TMX′ und TMY′, welche die Richtung der Kraft $m \cdot v^2$ mit den Axen macht, während

$$-\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial s}$$

die Kosinusse der Winkel VMX′ und VMY′ sind, welche die Richtung MV der Kraft N mit denselben Axen macht.

Nach den Gesetzen der Bewegung (IV. Th. d. S. Anhang Nr. 66.) hat man daher die beiden Gleichungen der Bewegung, nämlich

$$1) \qquad \partial^2 x + m \cdot v^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + N \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 0,$$

$$2) \qquad \partial^2 y + m \cdot v^2 \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - N \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + g = 0,$$

während nach dem (IV. Th. d. S. Anhang N. N. 51. und 66.)

$$3) \qquad \partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2 = v^2$$

ist. Nun ist die Zeit t bald gefunden. Es ist nämlich

$$4) \qquad t = \int 1 \cdot dt = \int (1 \cdot \partial t_x) \cdot dx$$

nach (IV. Th. d. S. §. §. 165. 166.); während nach (§. §. 58—60. d. III. Th. d. S.)

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial x^2 \cdot (1 + \partial y_x^2) = \frac{1 + \partial y_x^2}{\partial t_x^2},$$

ist, so daß die Gleichung (3.) sogleich

$$\partial t_x = \frac{\sqrt{1 + \partial y_x^2}}{v}$$

giebt, also daß nach (4.)

$$t = \int \frac{\sqrt{1 + \partial y_x^2}}{v} \cdot dx$$ ist.

Wird demnach die Zeit, welche das Minimum werden soll, durch V bezeichnet, so hat man

$$(\odot)\cdots \quad V = \int_{b\div a} \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{v}\cdot dx,$$

während jedoch zwischen v und y eine Gleichung $L = 0$ statt findet, die nun noch gesucht werden soll.

Um diese Gleichung $L = 0$ zu finden, multiplizire man die Gleichung (1.) mit $\partial x$, die (2.) mit $\partial y$ und addire beide Gleichungen; und man erhält:

$$5) \quad \partial x\cdot\partial^2 x + \partial y\cdot\partial^2 y + m\cdot v^2\cdot\partial s + g\cdot\partial y = 0.$$

Differenziirt man aber die (3.) nach allem t, so erhält man

$$6) \quad \partial x\cdot\partial^2 x + \partial y\cdot\partial^2 y = v\cdot\partial v;$$

und subtrahirt man diese Gleichungen (6. und 5.) von einander, so ergiebt sich als Differenzialgleichung $L = 0$ zwischen v und y die folgende

$$v\cdot\partial v + mv^2\cdot\partial s + g\cdot\partial y = 0,$$

oder, wenn man durch $\partial x$ dividirt, nach (§. §. 58 — 60. d. III. Th. d. S.)

$$v\cdot\partial v_x + m\cdot v^2\cdot\partial s_x + g\cdot\partial y_x = 0$$

$$\text{oder } (\mathbb{C})\cdots \quad L = v\cdot\partial v_x + m\cdot v^2\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2} + g\cdot\partial y_x = 0.$$

Nachdem aber die Aufgabe hergestellt ist, schreiten wir zu ihrer Lösung. Ist nämlich $y_x$ die zu der Abscisse x gehörige Ordinate der nächsten Nachbarkurven, so wie $v_x$ die zugehörige Geschwindigkeit, so findet die Gleichung ($\mathbb{C}$) eben so zwischen $y_x$ und $v_x$ statt, wie zwischen y und v; also hat man nicht bloß

$$7) \quad \delta V = \int_{b\div a} \left(\frac{\partial y_x}{v\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}}\cdot\partial\delta y - \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{v^2}\cdot\delta v\right)\cdot dx,$$

sondern auch zwischen $\delta y$ und $\delta v$ noch die Abhängigkeit

$$8) \quad \delta L = \partial v_x\cdot\delta v + v\cdot\partial\delta v + 2mv\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot\delta v + \left(mv^2\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}} + g\right)\cdot\partial\delta y = 0.$$

Weil man jedoch nicht sogleich sieht, wie aus letzterer Gleichung $\delta L = 0$, $\delta v$ gefunden und aus der Gleichung $\delta V = 0$ eliminirt werden kann, so wird man hier das im (§. 477. R. VII.) beschriebene Eliminations-Verfahren, d. h. die „Methode der Multiplikatoren" eintreten lassen.

Zu dem Ende addire man $\lambda \cdot \delta L$ (aus (8.)) (welches Null ist) zu dem Ausdrucke unter dem Integralzeichen in (7.), so daß man

9) $$\delta V =$$

$$\int_{b \div a} \left( \frac{\partial v_x}{v \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}} + \lambda \cdot \left( m \cdot v^2 \cdot \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} + g \right) \right) \cdot \partial \delta y \cdot dx$$

$$+ \int_{b \div a} \left( - \frac{\sqrt{1 + \partial y_x^2}}{v^2} + \lambda \cdot \partial v_x + 2m\lambda \cdot v \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} \right) \cdot \delta v \cdot dx$$

$$+ \int_{b \div a} \lambda v \cdot \partial \delta v \cdot dx$$

erhält. — Integrirt man nun das erste und das dritte dieser Integrale theilweise, um diesen Ausdruck für $\delta V$ auf die im (§. 477. R. V.) als nothwendig erkannte Form zu bringen, so ergiebt sich

10) $$\delta V =$$

$$- \int_{b \div a} \partial \left( \frac{\partial y_x}{v \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}} + m \cdot \lambda \cdot v^2 \cdot \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} + g\lambda \right) \cdot \delta y \cdot dx$$

$$- \int_{b \div a} \left( \frac{\sqrt{1 + \partial y_x^2}}{v^2} - \lambda \cdot \partial v_x - 2m \cdot \lambda \cdot v \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} + \partial(\lambda \cdot v) \right) \cdot \delta v \cdot dx$$

$$+ \left[ \left( \frac{\partial y_x}{v \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}} + m \cdot \lambda \cdot v^2 \cdot \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} + g\lambda \right) \cdot \delta y \right]_{b \div a}$$

$$+ [\lambda v \cdot \delta v]_{b \div a} .$$

Denkt man sich nun die anfänglich ganz unbestimmt gedachte Funktion $\lambda$ so bestimmt, daß in diesem Ausdrucke für $\delta V$ alle mit $\delta v$ und mit $\delta v_b$, $\delta v_a$ behafteteten Glieder der Null gleich werden, und zerlegt man zuletzt die Gleichung $\delta V = 0$ wegen der Unabhängigkeit und Willkührlichkeit von $\delta y$ gehörig, so erhält man, weil noch $-\lambda \cdot \partial v_x + \partial(\lambda v) = v \cdot \partial \lambda_x$ ist, die

allgemeinen Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \partial\left(\frac{\partial y_x}{v\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}}+m\cdot\lambda\cdot v^2\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}+g\cdot\lambda\right)=0$$

$$\text{II.}\quad \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{v^2}-2m\cdot\lambda\cdot v\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}+v\cdot\partial\lambda_x=0,$$

uud noch die Grenzgleichungen, welche wir jedoch hier zunächst nicht betrachten wollen.

## Integration und Behandlung der allgemeinen Gleichungen (I. und II.).

Nimmt man von der Gleichung (I.) links und rechts das Integral, so hat man zunächst

$$11)\quad \frac{\partial y_x}{v\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}}+m\cdot\lambda\cdot v^2\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}+g\cdot\lambda=c,$$

wo c eine willkührliche Konstante ist. Daraus folgt

$$12)\quad \lambda=\frac{c\cdot v\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}-\partial y_x}{m\cdot v^2\cdot\partial y_x+g\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}},$$

und hieraus findet man, wenn man differenziirt, wiederum $\partial\lambda_x$, so daß, wenn diese Werthe statt $\lambda$ und $\partial\lambda_x$ in die Gleichung (II.) subſtituirt werden, eine Gleichung bloß zwiſchen y, v und den Ableitungen von y und v nach x hervorgeht, welche mit der (C) durch Elimination von v und deſſen Ableitungen (nach §. 281. d. V. Th. d. S.) verbunden, die Differenzialgleichung zwiſchen x und y liefert, die zuletzt noch integrirt werden muß.

## Neue Behandlung der Aufgabe von vorne herein.

Weil jedoch die Rechnungen ſehr verwickelt werden, ſo iſt jede, ſelbſt die kleinſte Abkürzung derſelben nicht außer Acht zu laſſen. Die Rechnung wird aber vereinfacht, einmal dadurch, daß man $v^2$ durch u bezeichnet, und u in die Rechnung einführt, und dann noch dadurch, daß man y als den unabhängigen Veränderlichen nimmt, und x als Funktion von y anſieht,

d. h. daß OY als Abscissen-Axe und OX als Ordinaten-Axe genommen wird.

Man hat dann

$$t = \int 1 \cdot dt = \int 1 \cdot \partial t_y \cdot dy,$$

also

$$(\odot_1) \cdots \quad V = \int_{\beta \div \alpha} \frac{\sqrt{1 + \partial x_y^2}}{\sqrt{u}} \cdot dy,$$

wenn $OA_2 = \beta$ und $OB_2 = \alpha$

(Fig. 7.) gesetzt wird, so daß jetzt $A_2A = OA_1 = x_\beta$ und $B_2B = OB_1 = x_\alpha$ gesetzt werden kann. Dann führt man in die Gleichung (ℂ) ebenfalls lauter Ableitungen nach y ein (d. h. man betrachtet y als den unabhängigen Veränderlichen), so daß sie wird, in so ferne nun $v \cdot \partial v_y = \frac{1}{2} \partial u_y$ ist,

$$(\mathbb{C}_1) \qquad L = \partial u_y + 2mu \cdot \sqrt{1 + \partial x_y^2} + 2g = 0.$$

Multiplizirt man nun, wie vorhin, die Gleichung $L = 0$ mit einer noch ganz unbestimmt gedachten Funktion $\lambda$ und addirt solches Produkt $\lambda \cdot L$ (welches Null ist) zu dem Ausdrucke unter dem Integralzeichen für V in $(\odot_1)$, so hat man

$$1') \quad V = \int_{\beta \div \alpha} \left( \frac{\sqrt{1 + \partial x_y^2}}{\sqrt{u}} + \lambda (\partial u_y + 2mu \cdot \sqrt{1 + \partial x_y^2} + 2g) \right) \cdot dy,$$

also

$$2') \quad V = \int_{\beta \div \alpha} U \cdot dy \quad \text{und} \quad V_\varkappa = \int_{\beta \div \alpha} U_\varkappa \cdot dy,$$

wenn

$$3') \quad U = \frac{\sqrt{1 + x_1^2}}{\sqrt{u}} + \lambda \cdot (u_1 + 2mu \cdot \sqrt{1 + x_1^2} + 2g)$$

genommen ist, und wo $x_1$, $u_1$ statt $\partial x_y$ und $\partial u_y$ geschrieben worden ist.

Wenn nun $x_\varkappa$ die Ordinate der nächsten Nachbarkurven vorstellt, und $u_\varkappa$ die zugehörige Geschwindigkeit (im Quadrat); wenn ferner $U_\varkappa$ das bedeutet, was aus U wird, sobald man $x_\varkappa$ und $u_\varkappa$ beziehlich statt x und u setzt, so hat man

$$4') \quad \delta U = \partial U_{x_1} \cdot \partial \delta x + \partial U_u \cdot \delta u + \partial U_{u_1} \cdot \partial \delta u,$$

wo alle ∂ sich auf den unabhängigen Veränderlichen y beziehen, und wo sich findet:

$$5') \qquad \partial U_{x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+x_1^2}} + 2m\cdot\lambda\cdot u\cdot\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}};$$

$$6') \qquad \partial U_u = -\frac{\sqrt{1+x_1^2}}{2u\cdot\sqrt{u}} + 2m\lambda\cdot\sqrt{1+x_1^2};$$

und

$$7') \qquad \partial U_{u_1} = \lambda.$$

Ferner hat man

$$8') \qquad \delta V = \int_{\beta\div\alpha}\delta U\cdot dy$$

$$= \int_{\beta\div\alpha}(\partial U_{x_1}\cdot\partial\delta x + \partial U_u\cdot\delta u + \partial U_{u_1}\cdot\partial\delta u)\cdot dy,$$

oder, wenn man theilweise integrirt, so weit dies nöthig ist, um die im (§. 477. Nr. V.) für δV als nothwendig erkannte Form zu erhalten,

$$9') \qquad \delta V = \int_{\beta\div\alpha}([\partial U_u - \partial(\partial U_{u_1})]\cdot\delta u - \partial(\partial U_{x_1})\cdot\delta x)\cdot dy$$

$$+ [\partial U_{u_1}\cdot\delta u]_{\beta\div\alpha} + [\partial U_{x_1}\cdot\delta x]_{\beta\div\alpha},$$

indem durchgehends y als der unabhängige Veränderliche angesehen worden ist.

Die Gleichung $\delta V = 0$ giebt nun die beiden allgemeinen Gleichungen

$$I'. \qquad \partial(\partial U_{x_1}) = 0 \quad \text{oder} \quad \partial U_{x_1} = c,$$

$$\text{d. h.} \qquad \frac{1+2m\lambda\cdot u\cdot\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\cdot\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} = c,$$

wo c eine willkührliche Konstante ist;

$$II'. \qquad \partial U_u - \partial(\partial U_{u_1}) = 0,$$

$$\text{d. h.} \qquad -\frac{\sqrt{1+x_1^2}}{2u\cdot\sqrt{u}} + 2m\lambda\cdot\sqrt{1+x_1^2} - \partial\lambda_y = 0,$$

während die mit $\delta x_\beta$, $\delta x_\alpha$ affizirten Grenzglieder herausfallen, weil die Endpunkte A und B gegeben sind, weil also

$$\delta x_\beta = \delta x_\alpha = 0$$

ist; so daß als Grenzgleichungen sich nur noch ergeben

III′. $[\partial U_{u_1}]_\beta \cdot \delta u_\beta = 0$ und IV′. $[\partial U_{u_1}]_\alpha \cdot \delta u_\alpha = 0$,

d. h. $\lambda_\beta \cdot \delta u_\beta = 0$ und $\lambda_\alpha \cdot \delta u_\alpha = 0$.

## Integration der jetzigen Gleichungen I′ und II′.

Die Gleichung (I′.) giebt nun sogleich

$$10') \qquad \lambda = -\frac{1}{2m \cdot u \cdot \sqrt{u}} + \frac{c \cdot \sqrt{1+x_1^2}}{2m \cdot u \cdot x_1}.$$

Differenziirt man diese Gleichung nach allem y, so ergiebt sich ferner

$$11') \quad \partial\lambda_y = \frac{3 \cdot \partial u_y}{4m \cdot u^2 \cdot \sqrt{u}} - \frac{c \cdot \partial^2 x_y}{2m \cdot u \cdot \partial x_y^2 \cdot \sqrt{1+\partial x_y^2}} - \frac{c \cdot \sqrt{1+\partial x_y^2} \cdot \partial u_y}{2m \cdot u^2 \cdot \partial x_y};$$

und substituirt man nun diese Werthe aus (10′ und 11′.) statt $\lambda$ und $\partial\lambda_y$ in die Gleichung (II′.), so ergiebt sich, wenn noch mit u wegmultiplizirt wird,

$$12') \quad -\frac{3\sqrt{1+\partial x_y^2}}{2\sqrt{u}} + \frac{c \cdot (1+\partial x_y^2)}{\partial x_y} - \frac{3\partial u_y}{4mu \cdot \sqrt{u}} + \frac{c \cdot \partial^2 x_y}{2m \cdot \partial x_y^2 \cdot \sqrt{1+\partial x_y^2}} + \frac{c \cdot \sqrt{1+\partial x_y^2} \cdot \partial u_y}{2mu \cdot \partial x_y} = 0;$$

und dies ist also die Gleichung, welche aus (1′. und II′.) hervorgeht, wenn man aus beiden $\lambda$ eliminirt. Aus dieser Gleichung (12′.) in Verbindung mit der ($\mathfrak{C}_1$), nämlich mit

$$(\mathfrak{C}_1) \cdots \qquad \partial u_y + 2mu \cdot \sqrt{1+\partial x_y^2} + 2g = 0,$$

muß nun noch u und jede Ableitung von u eliminirt werden, wenn man die Gleichung zwischen y, x und den Ableitungen von x nach y haben will.

Man müßte zu dem Ende jede der beiden Gleichungen (12′ und $\mathfrak{C}_1$) nach allem y differenziiren und dann aus allen 4 Gleichungen die 3 Ausdrücke u, $\partial u_y$ und $\partial^2 u_y$ elimiiren. Die Differenzialgleichung zwischen y und x enthält dann

$\partial x_y$, $\partial^2 x_y$ und $\partial^3 x_y$,

d. h. ist von der dritten Ordnung und führt, wenn sie integrirt wird, 3 willkührliche Konstanten ein. Weil jedoch diese Rechnung wiederum sehr weitläufig wird, so ist es dasmal besser, wenn man aus den beiden Gleichungen (12′ und $\mathfrak{C}_1$) zunächst bloß $\partial u_y$ (und nicht u selbst) auf algebraischem Wege eliminirt; so daß man erhält:

$$13') \quad \frac{3g}{2u\cdot\sqrt{u}} + \frac{c\cdot\partial^2 x_y}{2\cdot\partial x_y^2\cdot\sqrt{1+\partial x_y^2}} - \frac{gc\cdot\sqrt{1+\partial x_y^3}}{u\cdot\partial x_y} = 0.$$

Um sich nun noch eine solche Gleichung, wie diese (13′.) ist, zu verschaffen, eliminire man aus (II′ u. I′.) zuerst bloß $\lambda$ (und nicht $\partial\lambda_y$), so erhält man, wenn man das Resultat mit (13′.) selbst wieder verbindet,

$$14') \quad \partial\lambda_y = \frac{c\cdot\partial^2 x_y}{2g\cdot\partial x_y^2},$$

und daraus, wenn man links und rechts die Integrale nach y nimmt,

$$15') \quad \lambda = -\frac{c}{2g\cdot\partial x_y} + c_1,$$

wo $c_1$ eine neue willkührliche Konstante ist. Dieser neue Werth von $\lambda$, in Verbindung mit dem Werthe in (10′.), liefert:

$$16') \quad 2c_1 m - \frac{cm'}{g\cdot\partial x_y} + \frac{1}{u\cdot\sqrt{u}} - \frac{c\cdot\sqrt{1+\partial x_y^2}}{u\cdot\partial x_y} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen (13′. und 16′.) kann nun u auf algebraischem Wege eliminirt werden, und man hat dann eine Differenzialgleichung zwischen x und y bloß von der 2ten Ordnung, welche, integrirt, noch zwei willkührliche Konstanten einführt.

Ist z. B. $m = 0$, d. h. wird die Bewegung im leeren Raume vorausgesetzt, so giebt die Gleichung (16′.) jetzt

$$1\cdot1\cdot) \quad u = \frac{\partial x_y^2}{c^2\cdot(1+\partial x_y^2)};$$

und dieser Werth, in die (13′.) substituirt, giebt:

$$2\cdot2\cdot) \quad c^2\cdot g\cdot(1+\partial x_y^2)^2 + \partial x_y\cdot\partial^2 x_y = 0;$$

oder, wenn man $\partial x_y = z$ setzt,

$$c^2 \cdot g \cdot (1+z^2)^2 + z \cdot \partial z_y = 0,$$

oder

$$c^2 \cdot g + \frac{z \cdot \partial z_y}{(1+z^2)^2} = 0,$$

oder, wenn man nach allem y das Integral nimmt,

$$c^2 g \cdot y + \int \frac{z}{(1+z^2)^2} \cdot dz = c_2,$$

oder

$$c^2 g \cdot y - \frac{1}{2(1+z^2)} = c_2,$$

wo $c_2$ eine dritte willkührliche Konstante vorstellt; oder, wenn man statt z wieder seinen Werth $\partial x_y$ setzt,

$$c^2 g \cdot y - \frac{1}{2(1+\partial x_y^2)} = c_2.$$

Um nun diese Differenzialgleichung der ersten Ordnung noch einmal zu integriren, muß sie nach $\partial x_y$ algebraisch aufgelößt werden, und man erhält dann

3.3.) $$\partial x_y = \sqrt{\left(\frac{+(1+2c_2)-2c^2 g \cdot y}{-2c_2+2c^2 g \cdot y}\right)},$$

woraus dann

4.4.) $$x = \int \left(\sqrt{\left(\frac{+(1+2c_2)-2c^2 g \cdot y}{-2c_2+2c^2 g \cdot y}\right)}\right) \cdot dy + c_3$$

hervorgeht, wo $c_3$ die 4te willkührliche Konstante ist, *) die von der Annahme des Anfangspunktes der y auf der Axe OY abhängt.

---

*) Nach dem IV. Th. d. S. Anhang pagg. (13. u. 44.) findet sich bald, daß die hier vorstehende Gleichung (3.3.) oder (4.4.) einer Zykloide angehört, deren Erzeugungskreis $\frac{1}{2c^2 g}$ zum Durchmesser hat. — Man darf nur dort (im Anhange zum IV. Th. d. S. N. 10.) eine neue Abscissen-Axe einführen parallel mit der alten, so daß, wenn die neue Ordinate durch y′ bezeichnet wird, man

$$y = 2r + q - y'$$

hat, so hat man die beiden Gleichungen der Zykloide, nämlich

$$x = t - r \cdot Cos \frac{t}{r}$$

und $$2r + q - y' = r - r \cdot Sin \frac{t}{r},$$

## Weitere Verfolgung der allgemeinen Aufgabe.

Hat man nun integrirt, und die Gleichung zwischen x und y mit den 4 willkührlichen Konstanten gefunden, und eben dadurch aus (13′. oder 16′.) und aus (10′. oder 15′.) auch u u. $\lambda$ in x oder y und in dieselben 4 Konstanten ausgedrückt, so müssen wir nun weiter gehen zur Bestimmung dieser Konstanten.

Diese Konstanten werden aber von den Grenzbedingungen abhängen, also davon, daß die Punkte A und B gegeben sind, und dann noch von der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit des schweren Punktes (in A), welche letztere $= \gamma$ und in der gesuchten, wie in den nächsten Nachbarkurven, dieselbe seyn soll, so daß man

17′) $$u_\beta = y^2$$

hat.

Dann hat man $\delta u_\beta = 0$, und die Grenzgleichung (III′.) ist von selbst erfüllt. Die Grenzgleichung (IV′.) endlich giebt

18′) $$\lambda_\alpha = 0.$$

Hat man also x, u und $\lambda$, wie vorher gezeigt worden ist, in y und den 4 Konstanten $c$, $c_1$, $c_2$ und $c_3$ ausgedrückt gefunden, so setzt man in dem Ausdrucke für x, statt y zuerst den Werth $\beta$, dann den Werth $\alpha$; eben so in u statt y den Werth $\beta$, und in $\lambda$ statt y den Werth $\alpha$, um die Werthe zu haben, welche durch $x_\beta$, $x_\alpha$, $u_\beta$ und $\lambda_\alpha$ bezeichnet werden. Die 4 Gleichungen

19′) $x_\beta = a$, 20′) $x_\alpha = b$, 17′) $u_\beta = y^2$ und 18′) $\lambda_\alpha = 0$

bestimmen nun die 4 Konstanten $c$, $c_1$, $c_2$ und $c_3$.

---

woraus $$\partial x_{y'} = \sqrt{\left(\frac{2r+q-y'}{-q+y'}\right)}$$

hervorgeht. Dividirt man nun oben in (3·3 und 4·4) Zähler und Nenner durch $2c^2g$, setzt auch $y'$ statt $y$, so hat man die hiesige Gleichung, sobald man

$$2r+q = \frac{1+2c_2}{2c^2 \cdot g} \quad \text{und} \quad q = \frac{c_2}{c^2 g}$$

nimmt.

In dem vorhin betrachteten besonderen Falle, wo $m = 0$ ist, findet sich, wenn man in (1·1·) den Werth aus (3·3·) statt $\partial x_y$ substituirt,

5·5·) $$u = \frac{1+2c_1}{c^2} - 2g \cdot y, \quad \text{also} \quad u_\beta = \frac{1+2c_2}{c^2} - 2g\beta.$$

Ferner findet sich aus (15′.)

6·6·) $$\lambda = -\frac{c}{2g} \cdot \sqrt{\left(\frac{2c_2 - 2c^2 g \cdot y}{-(1+2c_2)+2c^2 g \cdot y}\right)} + c_1.$$

Die 2 Gleichungen (17′.) und (18′.) werden daher in diesem besonderen Falle

7·7·) $$\frac{1+2c_2}{c^2} - 2g \cdot \beta = \gamma^2 \quad \text{oder} \quad 1+2c_2 - 2c^2 g \cdot \beta = c^2 \cdot \gamma^2$$

und

8·8·) $$-\frac{c}{2g} \cdot \sqrt{\left(\frac{2c^2 - 2c^2 g \cdot \alpha}{-(1+2c_2)+2c^2 g \cdot \alpha}\right)} + c_1 = 0,$$

während man, wenn die (20′.) von der (19′.) subtrahirt wird, nach (4.4.) noch hat

9·9·) $$\int_{\beta \div \alpha} \left(\sqrt{\left(\frac{-(1+2c_2)+2c^2 g \cdot y}{2c_2 - 2c^2 g \cdot y}\right)}\right) \cdot dy = a - b.$$

Diese 3 Gleichungen (7·7·), (8·8·) und (9·9·) zwischen den gegebenen Werthen $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ und den 3 Konstanten $c$, $c_1$ und $c_2$, dienen nun zur Bestimmung dieser letztern. Die 4te Konstante $c_3$ wird endlich aus den Gleichungen (20′.) und (4·4·) bestimmt. *)

---

*) Der besondere Fall dieser Aufgabe, in welchem der Widerstand nicht berücksichtigt wird, kann von vorne herein viel einfacher behandelt werden. Da nämlich dann die Gleichung ($C_1$) zwischen $u$ und $y$ bloß diese

$$\partial u_y + 2g = 0, \quad \text{also} \quad u + 2gy = c'$$

wird, so kann man sogleich in

$$V = \int_{\beta \div \alpha} \frac{\sqrt{1+\partial x_y^2}}{\sqrt{u}} \cdot dy$$

statt $u$ diesen Werth setzen, so daß man

$$V = \int_{\beta \div \alpha} \frac{\sqrt{1+\partial x_y^2}}{\sqrt{c' - 2gy}} \cdot dy$$

erhält. Dann gehört die Aufgabe zu den einfachern der (Nr. V. des

Anmerkung. Obgleich wir in der vorliegenden allgemeinen Aufgabe (21.) den Widerstand des Mittels $= m \cdot v^2$ vorausgesetzt haben, so wird man doch bei dem ersten Versuche finden, daß die Rechnung nur höchst unbedeutend und wesentlich fast gar nicht sich ändert, wenn man statt des Widerstandes $m \cdot v^2$ oder $m \cdot u$ irgend eine Funktion von $u$ setzt.

## Aufgabe 22.

(Zu §. §. 89—91. d. Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Es sey dieselbe Aufgabe (21.) gegeben, jedoch mit der Abänderung, daß statt der beiden Punkte A und B, jetzt nur ein Punkt und eine Kurve EBF (Fig. 7.) gegeben sind, so daß der schwere Punkte von einem gegebenen Punkte A, zu einem noch gesuchten Punkte B der gegebenen Kurve EBF hin, in der kürzesten Zeit fallen soll.

Da jetzt die Abscisse des Endpunktes B in den nächsten Nachbarkurven, deren zu $y$ gehörige Ordinate durch $x_\varkappa$ d. h. durch $x + \varkappa \cdot \delta x + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 x + \cdots$ vorgestellt ist, selber wieder durch $\alpha_\varkappa$ vorgestellt werden muß, wo $\alpha_\varkappa = \alpha + \varkappa \cdot \delta\alpha + \cdots$ ist, so hat man U genau so, wie in der vorhergehenden Aufgabe (N. 3′.), dagegen statt der dortigen (2′.) jetzt zwar

1) $$V = \int_{\beta \div \alpha} U \cdot dy, \quad \text{aber} \quad V_\varkappa = \int_{\beta \div \alpha_\varkappa} U_\varkappa \cdot dy.$$

Die Gleichung zwischen $u$ und $x$ bleibt dieselbe wie dort in ($\mathfrak{C}_1$); dagegen bekommt der dortige Ausdruck (N. 9′.) für $\delta V$ jetzt das Grenzglied

---

§. 477.) und giebt, danach behandelt, dieselbe Auflösung, wie hier oben solche gefunden worden ist.

Man kann jedoch auch $u$ in dem Ausdrucke für V stehen lassen, so daß man die allgemeinen Gleichungen (I′. und II′.) wieder erhält. Setzt man aber in diesen letzteren Gleichungen sogleich $m = 0$, so fällt ein Theil der übrigen Rechnung ganz weg, weil dann die Gleichung (I′.) in Verbindung mit der ($\mathfrak{C}_1$) sogleich die verlangte Gleichung (der Zykloide) zwischen $x$ und $y$ liefert.

$$2) \qquad -U_\alpha \cdot \delta\alpha$$

noch hinzu. — Die Gleichung $\delta V = 0$ zerfällt daher nun wieder zunächst in die beiden dortigen allgemeinen Gleichungen (I'. und II'.) *) und noch in Grenzgleichungen. Die allgemeinen Gleichungen werden gerade so integrirt, wie dort, und liefern wieder $x$, $u$ und $\lambda$ in $y$ und in 4 Konstanten $c$, $c_1$, $c_2$ und $c_3$ ausgedrückt.

Um die Grenzgleichungen zu bekommen, in welche die jetzige Gleichung $\delta V = 0$ noch zerfällt, so muß man wieder, wenn die Grenz-Kurve EBF durch die Gleichung

$$3) \qquad \varphi_{y,x} = 0$$

gegeben ist, bemerken, daß diese Gleichung identisch wird, wenn $\alpha_\varkappa$ und $[(x_\varkappa)_y]_{\alpha_\varkappa}$ beziehlich statt $y$ und $x$ gesetzt werden, daß daher in diesem Sinne noch

$$4) \qquad \partial\varphi_y \cdot \delta y + \partial\varphi_x \cdot \delta x = 0$$

ist, wenn nur in dieser Gleichung $\alpha$, $x_\alpha$ und $\delta\alpha$ beziehlich unter $y$, $x$ und $\delta y$ verstanden werden, und wenn $\delta x$ den Koeffizienten von $\varkappa$ in der Reihe für $[(x_\varkappa)_y]_{\alpha_\varkappa}$ vorstellt, so daß man

$$5) \qquad \delta x = [\partial x_y]_\alpha \cdot \delta\alpha + \delta x_\alpha$$

hat, also daß die Gleichung (4.) keine andere als folgende ist, nämlich

$$6) \qquad (\partial\varphi_y + \partial\varphi_x \cdot [\partial x_y]_\alpha) \cdot \delta\alpha + \partial\varphi_x \cdot \delta x_\alpha = 0,$$

sobald nur auch hier $\alpha$ und $x_\alpha$ unter $y$ und $x$ gedacht sind. **)

---

*) Man erinnere sich, daß von diesen beiden Gleichungen (I'. und II'.) die eine absichtlich so genommen ist, damit die unbestimmte Funktion $\lambda$ jetzt diejenige Bestimmung erhalte, welche sie haben muß, wenn aus dem Ausdrucke für $\delta V$, das unter dem Integralzeichen stehende, mit $\delta u$ behaftete Glied herausfallen, also $\delta u$ eliminirt seyn soll.

**) Alle diese Betrachtungen sind bereits in den Aufgaben (9—11.) angestellt worden und haben zu denselben Resultaten geführt, nur daß hier OY als Abscissen-Axe gedacht ist, d. h. $y$, $y$ als die unabhängigen Veränderlichen angesehen und behandelt worden sind. In den Aufgaben (12—20.) sind dieselben Betrachtungen noch in einem allgemeineren Falle durchgeführt.

Nun giebt aber der Theil von $\delta V$ in (N. 9′) der vorhergehenden Aufgabe, welcher die Grenzglieder enthält, und weil hier noch das Grenzglied in (2.), nämlich

$$-U_\alpha \cdot \delta\alpha,$$

hinzukommt, eben weil $\delta V = 0$ ist, zunächst die Gleichung

$$7)\ [\partial U_{u_1}]_\beta \cdot \delta u_\beta - [\partial U_{u_1}]_\alpha \cdot \delta u_\alpha + [\partial U_{x_1}]_\beta \cdot \delta x_\beta - [\partial U_{x_1}]_\alpha \cdot \delta x_\alpha - U_\alpha \cdot \delta\alpha = 0,$$

wo die Bezeichnung in dem Sinne zu nehmen ist, daß alles als Funktion von lauter y hergestellt seyn, und dann bald $\beta$, bald $\alpha$ statt y gesetzt werden soll, wie letzteres durch die unten angehängten $\beta$ oder $\alpha$ jedesmal angedeutet ist.

Aus den 2 Gleichungen (6. und 7.) muß nun $\delta x_\alpha$ eliminirt werden. Die entstehende Gleichung enthält dann noch 4 Glieder, welche beziehlich mit $\delta x_\beta$, $\delta u_\beta$, $\delta u_\alpha$ und $\delta\alpha$ behaftet sind. Es fragt sich daher nun noch, ob diese letzteren von einander noch abhängig oder von einander ganz unabhängig sind. Es bedeutet aber u das Quadrat der Geschwindigkeit, also bedeuten $u_\beta$, $u_\alpha$ die Quadrate der Geschwindigkeiten, welche der schwere Punkt in den Endpunkten A und B hat. Ist nun die Geschwindigkeit $\gamma$ im Anfangspunkte A wiederum gegeben, so ist abermals nicht bloß $\delta x_\beta = 0$, sondern auch $\delta u_\beta = 0$, so daß die damit behafteten Glieder der Grenzgleichung (7.) von selber herausfallen. Diese Grenzgleichung (7.), nachdem mittelst der Gleichung (6.) der Faktor $\delta x_\alpha$ eliminirt worden ist, zerfällt daher noch in die beiden Gleichungen, nämlich in:

$$8)\quad [\partial U_{u_1}]_\alpha = 0 \quad \text{d. h.} \quad \lambda_\alpha = 0$$

und $$9)\ [\partial U_{x_1}]_\alpha \cdot [\partial \varphi_y + \partial \varphi_x \cdot \partial x_y]_\alpha - U_\alpha \cdot [\partial \varphi_x]_\alpha = 0,$$

wo die Zeichen andeuten mögen, daß statt alles explizit und implizit vorkommende y und y allemal $\alpha$ substituirt werden soll.

Nun ist aber nach der vorhergehenden Aufgabe (20.) (N. N. 3′. und 5′.) wegen $\lambda_\alpha = 0$,

$$[\partial U_{x_1}]_\alpha = \left[\frac{\partial x_y}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\partial x_y^2}}\right]_\alpha \quad \text{und} \quad U_\alpha = \left[\frac{\sqrt{1+\partial x_y^2}}{\sqrt{u}}\right]_\alpha.$$

Subſtituirt man daher dieſe Werthe in die Gleichung (9.), ſo geht ſolche über in

10) $$\partial\varphi_y \cdot \partial x_y - \partial\varphi_x = 0,$$ *)

wo aber ſtatt jedes explizit oder implizit vorkommenden $y$ und $y$ überall $\alpha$ geſetzt werden muß, ſo daß ſtatt $x$ nun $x_\alpha$ zu ſtehen kommt, in ſo ferne $x_\alpha = x_\alpha$ ſeyn muß.

Dieſe beiden Gleichungen (8. und 9.), ferner die Gleichung $\varphi_{y,x} = 0$, wenn in ihr $\alpha$ und $x_\alpha$ ſtatt $y$ und $x$ geſetzt werden, und außerdem noch die Koordinatenwerthe eines gegebenen Punktes der geſuchten Kurve (z. B. die für den Punkt **A** gegebenen $\beta$ und $x_\beta$), ſo wie die Gleichung $u_\beta = \gamma^2$ beſtimmen nun wieder die durch die Integration eingegangenen 4 Konſtanten und noch die Grenz-Abſciſſe $\alpha$.

## Aufgabe 23.

Es wird in einer Ebene die kürzeſte Linie geſucht, unter allen nächſten Nachbarkurven, welche zwiſchen gegebenen, zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen, Grenz-Ordinaten alle einerlei Inhalt abſchneiden.

Man hat hier wiederum, wie in der Aufgabe (7.), wenn $x$ die Abſciſſe und $y_x$ die Ordinate der geſuchten Kurve vorſtellt,

1) $V = \int_{b\div a} \sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx$; 2) $V_\varkappa = \int_{b\div a} \sqrt{1+\partial (y_\varkappa)_x^2}\cdot dx$

und

---

*) Dieſe Gleichung lehrt wieder, wie wir bereits in den Aufgaben (9—12.) gezeigt haben, daß die geſuchte Kurve **AMB** auf der gegebenen Grenzkurve **EBF** ſenkrecht ſteht. —

Suchte man die Kurve des ſchnellſten Falles von dem gegebenen Punkte A bis zur Ordinatenrichtung $BB_1$, ſo würde man auf direktem Wege erhalten, da jetzt $\delta x_\alpha$ ganz willkührlich wäre, daß dieſe geſuchte Kurve auf der Ordinatenrichtung $BB_1$ ſenkrecht ſteht. Daſſelbe geht aber auch hervor, wenn man hier oben ſtatt der Kurve **EBF**, die gerade Richtung $BB_1$ (gegeben durch die Gleichung $0\cdot y + 1\cdot x = b$) als Grenzkurve nimmt.

$$3)\qquad \delta V = \int_{b\div a} \frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}} \cdot \partial\delta y \cdot dx;$$

d. h.

$$4)\qquad \delta V = -\int_{b\div a} \partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right)\cdot\delta y\cdot dx$$

$$+\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_b\cdot\delta y_b - \left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_a\cdot\delta y_a.$$

Weil aber alle nächsten Nachbarkurven zwischen den gegebenen Grenz-Abscissen a und b einerlei Inhalt haben sollen, so hat man noch

$$5)\qquad \int_{b\div a} y\cdot dx = \int_{b\div a} y_x\cdot dx,$$

d. h. 6)

$$\int_{b\div a} \delta y\cdot dx = 0.$$

Weil jedoch diese neue hinzutretende Bedingung (6.) für $\delta y$ nur eine Grenzbedingung ist, welche für jede beliebige Form der Funktion $\delta y$ durch die schickliche Annahme eines einzigen ihrer Koeffizienten erfüllt wird, so zerfällt dasmal die Gleichung $\delta V = 0$ doch wiederum, wie in der Aufgabe (7.), in die allgemeine Gleichung

$$\text{I.}\qquad \partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right) = 0, \qquad \partial y_x = C, \qquad y = C\cdot x + C_1,$$

und in die Grenzgleichungen

$$\text{II.}\qquad \left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_b = 0 \qquad \text{und} \qquad \left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_a = 0,$$

welche letztere beide jedoch wiederum in die einzige

$$7)\qquad C = 0$$

zusammenfallen, so daß die gesuchte Linie dasmal mit der Abscissen-Axe parallel läuft. — Zur Bestimmung der Konstante $C_1$ muß nun noch irgend eine Bedingung vorhanden seyn, z. B. daß der Inhalt ein gegebener und $= g$ ist. In diesem Falle hat man dann noch

$$\int_{b\div a} y\cdot dx = g \quad \text{d. h.} \quad \int_{b\div a} C_1\cdot dx = C_1\cdot(b-a) = g,$$

also 8) $$C_1 = \frac{g}{b-a}.$$

Anmerkung. Würde dagegen nur unter allen denjenigen nächsten Nachbarkurven, welche durch dieselben Grenzpunkte hindurchgehen, und welche denselben Inhalt g haben, die kürzeste gesucht; — so hätte man noch

$$\delta y_a = 0 \quad \text{und} \quad \delta y_b = 0.$$

Man hätte daher wieder als Gleichung der gesuchten kürzesten Linie

$$y = C \cdot x + C_1,$$

aber die Grenzgleichungen (II.) würden wegfallen, also würde C nicht Null, sondern diese Konstante C bliebe überhaupt noch unbestimmt, so wie $C_1$. — Zur Bestimmung dieser Konstanten hätte man dann die einzige Gleichung

$$\int_{b \div a} (C \cdot x + C_1) \cdot dx = \tfrac{1}{2} C \cdot (b^2 - a^2) + C_1 \cdot (b-a) = g,$$

d. h. $$C \cdot \frac{b+a}{2} + C_1 = \frac{g}{b-a};$$

und man kann daher jetzt, damit die andere Konstante bestimmt werde, diese kürzeste Linie noch zwingen, durch einen gegebenen Punkt hindurch zu gehen, zu welchem Behufe auch einer der beiden Grenzpunkte gegeben seyn kann, während von dem andern Grenzpunkte jedenfalls die Abscisse a oder b, als gegeben gedacht worden ist.

Dagegen ist sehr wesentlich verschieden von diesen letzteren Aufgaben die folgende:

## Aufgabe 24.

(Zu §. §. 98. 99. der Lehre vom Größten und Kleinsten.)

Unter allen denjenigen nächsten Nachbarkurven, welche sich durch die, von einer beliebigen Anfangs-Abscisse $\alpha$ bis zur unbestimmten Abscisse x genommenen, übrigens aber beliebig veränderten, Inhalte

$$z_x \quad \text{oder} \quad z_x + x \cdot \delta z + \cdots,$$

von einander unterscheiden (nach den verschiedenen Funktionen von x, welche statt $\delta z$, ꝛc. gesetzt werden), welche aber zwischen den bestimmten Grenz-Abscissen a und b einerlei Inhalt haben, die kürzeste herauszusuchen.

Hier ist die Ordinate $y_x$, der Voraussetzung gemäß, von dem Inhalte $z_x$ abhängig, und zwar durch die Gleichung

$$\int_{x \div a} y_x \cdot dx = z_x \quad \text{oder} \quad y_x = \partial(z_x)_x,$$

so daß man hat die Gleichung

$$1) \qquad L = y - \partial z_x = 0,$$

welche identisch werden muß, wenn auch $y_x$ und $z_x$ statt y und z gesetzt werden. Also hat man nun auch die Gleichung

$$2) \qquad \delta(y - \partial z_x) = 0 \quad \text{d. h.} \quad \delta y - \partial \delta z = 0,$$

welche noch weiter

$$3) \qquad \partial \delta y = \partial^2 \delta z$$

liefert. Da nun wiederum

$$4) \qquad \delta V = \int_{b \div a} \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \partial \delta y \cdot dx$$

ist, dasmal aber nicht $\delta y$, sondern $\delta z$ als eine unabhängige Funktion von x gedacht werden muß, so muß man sogleich aus (4.) mittelst der Gleichung (3.) den Ausdruck $\delta y$ eliminiren, und man erhält dann

$$5) \qquad \delta V = \int_{b \div a} \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \partial^2 \delta z \cdot dx,$$

oder, wenn man dies nach dem Verlangen der (N. V. des §. 477.) umformt, indem man zweimal hinter einander theilweise integrirt,

$$6) \qquad \delta V = \int_{b \div a} \partial^2 \left( \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \right) \cdot \delta z \cdot dx$$

$$- \left[ \partial \left( \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \right) \cdot \delta z \right]_{b \div a} + \left[ \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \cdot \partial \delta z \right]_{b \div a}.$$

Da nun $\delta z$ eine ganz beliebige Funktion von x ist, bloß der, aus

$$\int_{b\div a} y\cdot dx = \int_{b\div a} y_x\cdot dx \quad \text{oder} \quad \int_{b\div a} \delta y\cdot dx = 0$$

hervorgehenden, Grenzbedingung

$$7) \qquad \delta z_b - \delta z_a = 0$$

unterworfen, so erhält man aus $\delta V = 0$ jetzt zunächst die allgemeine Gleichung des Maximi und Minimi

$$\text{I.} \qquad \partial^2\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right) = 0,$$

und noch die Grenzgleichung

$$\text{II.} \begin{cases} -\left[\partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right)_x\right]_b \cdot \delta z_b + \left[\partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right)_x\right]_a \cdot \delta z_a \\ + \left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_b \cdot \partial\delta z_b - \left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_a \cdot \partial\delta z_a \end{cases} = 0,$$

wo $\partial\delta z_b$ statt $[\partial(\delta z)_x]_b$ und $\partial\delta z_a$ statt $[\partial(\delta z)_x]_a$

geschrieben worden ist, während diese Grenzgleichung den vorhandenen Grenzbedingungen gemäß noch weiter zerfallen wird.

## Integration der allgemeinen Gleichung (I.).

Diese Gleichung (I.) wird, wenn man die angezeigten beiden Differenziirungen verrichtet, eine Differenzialgleichung der dritten Ordnung, und giebt daher, wenn man sie integrirt, y in x mit drei willkührlichen Konstanten. Nimmt man aber in ihrer anfänglichen Form selbst, links und rechts zweimal hinter einander die Integrale nach allem x, so erhält man zuerst

$$8) \qquad \partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right) = c,$$

und dann

$$9) \qquad \frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}} = c\cdot x + c_1.$$

Um diese Gleichung (9.) der ersten Ordnung vollends zu integriren, muß man sie zuvor nach $\partial y_x$ algebraisch auflösen, so daß man erhält

10) $$\partial y_x = \frac{c \cdot x + c_1}{\sqrt{1-(c \cdot x + c_1)^2}};$$

und nimmt man nun hier links und rechts wiederum die Integrale nach allem x, so ergiebt sich

11) $$y = c_2 - \frac{1}{c} \cdot \sqrt{1-(c \cdot x + c_1)^2}$$

oder 12) $$(y-c_2)^2 + \left(x + \frac{c_1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2},$$

wo $c$, $c_1$ und $c_2$ die 3 willkührlichen Konstanten sind. Diese Gleichung (12.) ist aber die Gleichung einer Kreislinie, deren Radius (allemal positiv) $= \frac{1}{\pm c}$, und dessen Mittelpunkt durch die beiden Koordinatenwerthe $-\frac{c_1}{c}$ und $c_2$ bestimmt ist.

## Weitere Fortsetzung der Aufgabe.

Nach geschehener Integration der allgemeinen Gleichung (I.) betrachten wir nun die Grenzgleichung (II.). Setzt man in ihr die Werthe aus (8. und 9.), so wird sie folgende:

13) $$-c \cdot \delta z_b + c \cdot \delta z_a + (c \cdot b + c_1) \cdot \partial \delta z_b - (c \cdot a + c_1) \cdot \partial \delta z_a = 0,$$

und diese reduzirt sich wieder wegen der Bedingungsgleichung (7.) auf

14) $$(c \cdot b + c_1) \cdot \partial \delta z_b - (c \cdot a + c_1) \cdot \partial \delta z_a = 0.$$

Sind daher keine weiteren Bedingungen gegeben, so zerfällt, wegen der Willkührlichkeit der Werthe $\partial \delta z_b$ und $\partial \delta z_a$, die Gleichung (14.) wiederum in die beiden:

15) $c \cdot b + c_1 = 0$ und 16) $c \cdot a + c_1 = 0$,

wodurch die beiden Konstanten $c$ und $c_1$ sich bestimmen, von denen der Radius und die Abscisse des Mittelpunktes des gefundenen Kreises abhängt. Weil aber diese beiden Gleichungen (15. und 16.) sogleich

17) $$c = c_1 = 0$$

liefern, so ist der Radius des Kreises $= \frac{1}{0}$, der Kreis selbst also nicht mehr vorhanden.

Geht man aber nun zu den Gleichungen (8. und 9.) zurück, welche in der Grenzgleichung allein benutzt worden sind, und welche bei den gegenwärtigen Grenzbedingungen, $c_1 = c = 0$ geliefert haben, und integrirt man die (9.) unter dieser Voraussetzung, so erhält man für die gesuchte kürzeste Linie die Gleichung

18) $$y = c_2;$$

und man hat wieder die gerade, mit der Abscissen-Axe parallele, Linie.

## Aufgabe 25.

Wird dagegen noch die Bedingung hinzugefügt, daß die kürzeste Linie nur unter allen denen, den übrigen hiesigen Bedingungen genügenden nächsten Nachbarkurven gesucht werden, welche auch noch durch dieselben Grenzpunkte hindurchgehen; — so hat man noch

$$\delta y_a = \delta y_b = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial\delta z_a = \partial\delta z_b = 0,$$

und die Grenzgleichung (II.) ist von selbst erfüllt, so daß alle 3 Konstanten $c$, $c_1$ und $c_2$ der Gleichung (12.) noch völlig unbestimmt bleiben. Man kann daher nun die gefundene Kreislinie noch dreien Bedingungen unterwerfen, etwa, daß sie durch zwei gegebene Punkte hindurchgehe und noch innerhalb der Grenz-Abscissen einen gegebenen Inhalt habe.

## Aufgabe 26.

Soll die Kurve gefunden werden, welche unter allen denen, die von einerlei Länge sind, den größten Inhalt hat, so hat man jetzt

1) $$V = \int_{b\div a} y \cdot dx, \quad 2) \quad V_x = \int_{b\div a} y_x \cdot dx$$

und 3) $$\delta V = \int_{b\div a} 1 \cdot \delta y \cdot dx.$$

Wollte man sich nun $\delta y$ ganz willkührlich denken der Form nach, und bloß hinsichtlich der Konstanten so abgeändert, daß die

Länge der ganzen Kurven dieselbe bliebe, daß also

$$4)\quad \int_{b\div a}\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx = \int_{b\div a}\sqrt{1+\partial (y_\varkappa)_x^2}\cdot dx,$$

also

$$5)\quad \int_{b\div a}\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\cdot \partial\delta y\cdot dx = 0$$

ist, so würde die Gleichung $\delta V = 0$ zu dem Widerspruche $1 = 0$ führen, also dasmal anzeigen, daß unter allen beliebigen, der einzigen Einschränkung (4. oder 5.) unterworfenen nächsten Nachbarkurven keine befindlich ist, welche die hier verlangte Eigenschaft des Maximums hat.

## Aufgabe 27.

Würde aber verlangt, dieselbe Kurve des größten Inhalts bei einerlei Umfang unter einer andern Reihe nächster Nachbarkurven herauszufinden, und zwar unter denen, deren Länge, von einer gegebenen Abscisse $\alpha$ an bis zur unbestimmten Abscisse $x$ hin, als Funktion von $x$ durch das beliebige $z_x$ (die Länge der gesuchten Kurve selbst also durch $z$) vorgestellt ist, so wäre dasmal $\delta z$ willkührlich, aber, weil nun

$$6)\quad \int_{x\div\alpha}\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx = z \quad \text{d. h.} \quad 1+\partial y_x^2 = \partial z_x^2$$

ist, auch

$$7)\quad \partial y_x\cdot\partial\delta y = \partial z_x\cdot\partial\delta z,$$

mithin $\delta y$ mittelst dieser Gleichung von dem ganz willkührlichen, und nur der Bedingung

$$8)\quad \delta z_b - \delta z_a = 0$$

unterworfenen, Funktion $\delta z$ abhängig. — Man müßte nun aus

$$3)\quad \delta V = \int_{b\div a}\delta y\cdot dx$$

dieses $\delta y$ eliminiren und das unabhängige $\delta z$ an dessen Stelle bringen, welches jedoch, ohne wiederum die eigenthümliche, im (§. 477. N. VII.) unter dem Namen der „Methode der Multiplikatoren" beschriebene Eliminations-Methode anzuwenden, schwerer auszuführen seyn dürfte. *)

*) Diese „Methode der Multiplikatoren" besteht aber, wie wir schon

Wenden wir aber diese Methode hier an, wo

$$U = y \quad \text{und} \quad L = \sqrt{1+\partial y_x^2} - \partial z_x$$

ist, *) so hat man

$$9) \quad V = \int_{b\div a} [y + \lambda\cdot(\sqrt{1+\partial y_x^2} - \partial z_x)]\cdot dx,$$

$$\text{also} \quad 10) \quad \delta V = \int_{b\div a} \left(\delta y + \lambda\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\cdot\partial\delta y - \lambda\cdot\partial\delta z\right)\cdot dx,$$

oder, wenn man die beiden letztern Glieder theilweise integrirt, damit $\delta V$ die im (§. 477. N. V.) für die weitere Zerfällung der Gleichung $\delta V = 0$ als nothwendig erkannte Form erhält,

---

mehreremale gezeigt haben, darin, daß, wenn

$$V = \int U\cdot dx$$

ein Maximum oder Minimum werden soll, unter der Voraussetzung, daß zwischen $y$ und $z$ noch eine Gleichung

$$L = 0$$

statt findet, — man statt $V = \int U\cdot dx$ lieber $V = \int(U + \lambda\cdot L)\cdot dx$, oder statt $\delta V = \int \delta U\cdot dx$ lieber $\delta V = \int(\delta U + \lambda\cdot\delta L)\cdot dx$ setzt, zuletzt aber die Funktion $\lambda$ von $x$ so nimmt, daß aus $\delta V$ diejenigen Faktoren fortfallen, welche eliminirt werden sollen.

*) Da die zwischen $y$ und $z$ existirende Gleichung diese ist

$$\int_{x\div\alpha} \sqrt{1+\partial y_x^2} = z,$$

so hat man

$$\sqrt{1+\partial y_x^2} - \partial z_x = 0,$$

aber auch

$$1 + \partial y_x^2 - \partial z_x^2 = 0;$$

und man kann daher

$$L = \sqrt{1+\partial y_x^2} - \partial z_x,$$

aber auch

$$L = 1 + \partial y_x^2 - \partial z_x^2$$

nehmen. Thut man aber das letztere, so sieht man sich sogleich in viel mühsamere Rechnungen verwickelt, so daß man lieber $L$ so nimmt, wie dies hier oben wirklich geschehen ist.

$$11)\quad \delta V = \int_{b\div a}\left[1-\partial\left(\lambda\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right)\right]\cdot\delta y\cdot dx + \int_{b\div a}[\partial\lambda\cdot\delta z]\cdot dx + \left[\lambda\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\cdot\delta y\right]_{b\div a} - [\lambda\cdot\delta z]_{b\div a}.$$

Setzt man nun zur Bestimmung von $\lambda$

$$\text{I.}\quad 1-\partial\left(\lambda\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right)=0,$$

so hat man sogleich aus $\delta V = 0$ noch

$$\text{II.}\quad \partial\lambda = 0, \quad \text{also} \quad \lambda = \text{Constante};$$

Demnach aus (I.), wenn man integrirt:

$$12)\quad \lambda\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}} = x+c;$$

und wenn man daraus auf algebraischem Wege $\partial y_x$ findet,

$$13)\quad \partial y_x = \frac{x+c}{\sqrt{\lambda^2-(x+c)^2}},$$

woraus durch nochmalige Integration

$$y_x = c_1-\sqrt{\lambda^2-(x+c)^2}$$

$$\text{oder}\ 14)\quad (y-c_1)^2+(x+c)^2 = \lambda^2,$$

d. h. die Gleichung einer Kreislinie, hervorgeht, in welcher $-c$ und $c_1$ die Koordinaten des Mittelpunktes und $\lambda$ der Radius, zur Zeit noch unbestimmt, aber konstant sind. Die weiteren Gleichungen, welche aus $\delta V = 0$ hervorgehen, sind nun, wenn $\delta y_a$, $\delta y_b$ ganz unbestimmt bleiben,

$$\left.\begin{array}{l}\text{III.}\ \left[\lambda\cdot\dfrac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_b = 0 \ \text{d. h.}\ b+c=0 \\ \text{und IV.}\ \left[\lambda\cdot\dfrac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_a = 0 \ \text{d. h.}\ a+c=0\end{array}\right\}\ \text{wegen (12.),}$$

und widersprechen sich, so daß sie unter diesen Bedingungen die Unmöglichkeit einer Auflösung anzeigen. Macht man aber zur

Bedingung, daß $\delta y_a = \delta y_b = 0$ ist, d. h. daß alle Nachbarkurven zugleich mit der gesuchten durch dieselben Endpunkte hindurchgehen sollen, so fallen die Gleichungen (III. u. IV.) sogleich weg, während die noch weiter in $\delta V = 0$ enthaltene Gleichung

$$[\lambda \cdot \delta z]_{b \div a} = 0$$

d. h., weil $\lambda$ konstant ist,

$$\lambda \cdot \delta z_b - \lambda \cdot \delta z_a = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda \cdot (\delta z_b - \delta z_a) = 0,$$

wegen der Bedingung (N. 8.) ohnedies allemal identisch wird.

Die in dieser Aufgabe gesuchte Kurve ist daher nun eine Kreislinie, welche man noch zwingen kann, durch 3 gegebene Punkte hindurchzugehen oder dreien ähnlichen Bedingungen zu genügen, etwa durch 2 gegebene Punkte zu gehen, und dazwischen eine gegebene Länge zu haben; oder dergleichen.

## Aufgabe 28.

Es sey gegeben das Integral

$$1) \quad V = \int_{b \div a} \left( \frac{1}{\partial y_x} \cdot \int_{x \div a} y \cdot dx \right) \cdot dx,$$

welches gegen

$$2) \quad V_\varkappa = \int_{b \div a} \left( \partial (y_\varkappa)_x \int_{x \div a} (y_\varkappa)_x \cdot dx \right) \cdot dx$$

ein Maximum oder Minimum werden soll.

Auflösung. Man setze

$$3) \quad \int_{x \div a} y \cdot dx = z, \qquad \int_{x \div a} y_\varkappa \cdot dx = z_\varkappa,$$

also

$$4) \quad y - \partial z_x = 0;$$

und nehme nach (§. 477. N. VII.)

$$5) \quad V = \int_{b \div a} \left[ \frac{z}{\partial y_x} + \lambda \cdot (y - \partial z_x) \right] \cdot dx,$$

so hat man

$$6) \quad \delta V = \int_{b \div a} \left( \frac{\delta z}{\partial y_x} - \frac{z}{\partial y_x^2} \cdot \partial \delta y + \lambda \cdot \delta y - \lambda \cdot \partial \delta z \right) \cdot dx$$

oder, nach (N. V. des §. 477.) umgeformt, indem man theilweise integrirt,

$$7)\quad \delta V = \int_{b\div a}\left[\frac{1}{\partial y_x}+\partial\lambda_x\right]\cdot\delta z\cdot dx+\int_{b\div a}\left[\partial\left(\frac{z}{\partial y_x^2}\right)+\lambda\right]\cdot\delta y\cdot dx$$
$$-\left[\frac{z}{\partial y_x^2}\cdot\delta y\right]_{b\div a}-[\lambda\cdot\delta z]_{b\div a}.$$

Nimmt man nun $\lambda$ so, daß $\delta z$ herausfällt, so hat man

$$\text{I.}\quad \frac{1}{\partial y_x}+\partial\lambda_x = 0,$$

während die Gleichung $\delta V = 0$ dann sogleich noch

$$\text{II.}\quad \partial\left(\frac{z}{\partial y_x^2}\right)+\lambda = 0$$

liefert, welche beiden Gleichungen (I. und II.) in Verbindung mit der (4.) sogleich zur Bestimmung von $\lambda$, z und y in x dienen.

Um nun diese Bestimmung von y und z in x nach (§. 282. d. V. Th. d. S.) zu vollenden, differenziirt man die (II.) so, daß man erhält:

$$8)\quad \partial^2\left(\frac{z}{\partial y_x^2}\right)+\partial\lambda_x = 0,$$

und eliminirt aus dieser Gleichung (8.) und aus (I.) die Funktion $\partial\lambda_x$; und es ergiebt sich

$$9)\quad \frac{1}{\partial y_x}-\partial^2\left(\frac{z}{\partial y_x^2}\right) = 0$$

als diejenige Gleichung, welche mit der (4.), d. h. mit

$$4)\quad y-\partial z_x = 0,$$

durch Elimination von z verbunden (nach §. 281. d. V. Th. d. S.), y in x, also dann auch z und $\lambda$ in x mit 4 willkührlichen Konstanten liefert. *) Bestimmt man zuletzt noch zwei dieser

---

*) Das Integriren selbst, nach geschehener Elimination, wenn das Integral in endlicher Form hergestellt werden soll, scheint jedoch für dieses Beispiel nicht ausführbar zu seyn, so daß man zu einem Integral in Form von unendlichen Reihen seine Zuflucht nehmen müßte.

Konstanten durch die Gleichungen

10) $\lambda_b = 0$ und 15) $\lambda_a = 0$,

damit aus $\delta V$ in (7.) alle $\delta z$, d. h. auch $\delta z_b$ und $\delta z_a$, eliminirt sind, so giebt die Gleichung $\delta V = 0$ dann die Grenzgleichung

III. $$\left[\frac{z}{\partial y_x^2}\right]_b \cdot \delta y_b - \left[\frac{z}{\partial y_x^2}\right]_a \cdot \delta y_a = 0,$$

welche noch zur Bestimmung der beiden übrigen Konstanten benutzt werden muß.

## Aufgabe 29.

Man soll den Körper finden, welcher zwischen zweien Paaren zu $x = a$ und $x = b$ und zu $y = \alpha$ und $y = \beta$ gehörigen parallelen und beziehlich auf den Axen der x und der y senkrechten Ebenen die kleinste Oberfläche hat.

Ist hier z die gesuchte 3te Koordinate, wie sie zu beliebigen x und y gehört, so hat man

1) $$V = \int_{b \div a} \left( \int_{\beta \div \alpha} \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dy \right) \cdot dx,$$

also

2) $$\delta V = \int_{b \div a} \left( \int_{\beta \div \alpha} \frac{\partial z_x \cdot \partial (\delta z)_x + \partial z_y \cdot \partial (\delta z)_y}{\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}} \cdot dy \right) \cdot dx,$$

woraus durch die angeführte Umformung

$$3)\quad \delta V = -\int_{b\div a}\left(\int_{\beta\div\alpha}\left[\partial\left(\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}}\right)_x+\partial\left(\frac{\partial z_y}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}}\right)_y\right]\delta y\cdot dy\right)\cdot dx$$

$$+\int_{\beta\div\alpha}\left[\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}}\cdot\delta z\right]_{b\div a}\cdot dy+\int_{\beta\div\alpha}\left[\frac{\partial z_y}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}}\cdot\delta z\right]_{\beta\div\alpha}\cdot dx$$

hervorgeht. — Die Gleichung $\delta V = 0$ giebt nun sogleich

$$4)\quad \partial\left(\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}}\right)_x+\partial\left(\frac{\partial z_y}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}}\right)_y = 0,$$

d. h. $$5)\quad \partial^2 z_x\cdot(1+\partial z_y^2)-2\partial z_x\cdot\partial z_y\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}+\partial^2 z_y\cdot(1+\partial z_x^2) = 0,$$

welche Parzialgleichung der 2ten Ordnung im Kap. (XX.) mehreremale in endlicher Form zu integriren versucht worden ist, und deren Integral im Allgemeinen zwei willkührliche Funktionen von bestimmten Funktionen enthält.

Macht man zur Bedingung, daß alle nächsten Nachbarflächen $z_n$ durch dieselben Grenzen hindurchgehen, so hat man

$$[(\delta z)_x]_b = [(\delta z)_y]_\beta = [(\delta z)_x]_a = [(\delta z)_y]_\alpha = 0,$$

und die Gleichung $\delta V = 0$ ist im Uebrigen identisch und liefert nichts weiter, so daß

man zur Bestimmung der willkührlichen Funktion noch verschiedene Bedingungen geben, die Aufgabe selbst also in viele einzelne besondere zerlegen kann. *)

## Aufgabe 30.

Sollte der Körper gesucht werden, welcher zwischen den im vorigen Beispiele erwähnten Grenzen unter allen, die dieselbe Oberfläche haben, den größten Inhalt hat, während übrigens in allen nächsten Nachbarkörpern die Oberfläche als Funktion von x und y beliebig variirt, so hat man

1) $$V = \int_{b \div a} \left( \int_{\beta \div \alpha} z \cdot dy \right) \cdot dx,$$

und setzt

2) $$\int_{x \div a} \left( \int_{y \div \beta} \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dy \right) \cdot dx = u,$$

so daß

3) $$\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} - \partial^{1,1} u_{x\,y} = 0$$

wird. Dann nimmt man dem (§. 477. N. VII.) gemäß

4) $$V = \int_{b \div a} \int_{\beta \div \alpha} [z + \lambda (\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} - \partial^{1,1} u_{x,y})] \cdot dy \cdot dx$$

und hat

---

*) Wir bemerken hier nur, daß nach den verschiedenen Nebenbedingungen die hier gesuchte Fläche eine Ebene, eine Kugelfläche, aber auch eine andere gekrümmte Fläche seyn kann und seyn muß, während alle diese Flächen Koordinaten x, y, z haben und durch eine Gleichung $z = z_{x,y}$ so bestimmt seyn müssen, daß der Parzial-Gleichung (5.) genügt wird.

5) $$\delta V = \int_{b\div a}\int_{\beta\div\alpha}\left[\delta z+\lambda\cdot\frac{\partial z_x\cdot\partial(\delta z)_x+\partial z_y\cdot\partial(\delta z)_y}{\sqrt{1+\partial z_x^{\,2}+\partial z_y^{\,2}}}-\lambda\cdot\partial^{1,1}(\delta u)_{x,y}\right]\cdot dy\cdot dx,$$

oder, nach der Umformung,

6) $$\delta V = \int_{b\div a}\int_{\beta\div\alpha}\left[1-\partial\left(\frac{\lambda\cdot\partial z_x}{\sqrt{1+\partial z_x^{\,2}+\partial z_y^{\,2}}}\right)_x-\partial\left(\frac{\lambda\cdot\partial z_y}{\sqrt{1+\partial z_x^{\,2}+\partial z_y^{\,2}}}\right)_y\right]\cdot\delta z\cdot dy\cdot dx$$

$$-\int_{b\div a}\int_{\beta\div\alpha}\partial^{1,1}\lambda_{x,y}\cdot\delta u\cdot dy\cdot dx$$

$$+\int_{\beta\div\alpha}\left[\frac{\lambda\cdot\partial z_x}{\sqrt{1+\partial z_x^{\,2}+\partial z_y^{\,2}}}\cdot\delta z\right]_{b\div a}\cdot dy+\int_{b\div a}\left[\frac{\lambda\cdot\partial z_y}{\sqrt{1+\partial z_x^{\,2}+\partial z_y^{\,2}}}\cdot\delta z\right]_{\beta\div\alpha}\cdot dx$$

$$+\int_{\beta\div\alpha}[\partial\lambda_y\cdot\delta u]_{b\div a}\cdot dy+\int_{b\div a}[\partial\lambda_x\cdot\delta u]_{\beta\div\alpha}\cdot dx-[\lambda_{x,y}\cdot\delta u_{x,y}]_{b\div a,\beta\div\alpha}\ *),$$

wo die Zeichen andeuten, daß immer b oder a statt x, dagegen $\beta$ oder $\alpha$ statt y zu setzen ist.

---

*) Es stellt das Zeichen $[f_{x,y}]_{b\div a,\beta\div\alpha}$ den Ausdruck $f_{b,\beta}-f_{b,\alpha}-f_{a,\beta}+f_{a,\alpha}$ vor, welcher aus $f_{x,y}$ hervorgeht, wenn erstlich b und $\beta$ beziehlich statt x und y, nachher aber a und $\alpha$ beziehlich statt x und y gesetzt werden.

Denkt man sich nun $\lambda$ als diejenige Funktion von x und y, welche in diesem Ausdrucke für $\delta V$ den unter dem doppelten Integralzeichen befindlichen Koeffizienten von $\delta z$ zu Null macht, so liefert $\delta V = 0$ auch noch den nächsten Koeffizienten von $\delta u$ unter dem doppelten Integralzeichen der Null gleich; und man hat die beiden Gleichungen

$$\text{I.}\quad 1 - \partial\left(\frac{\lambda.\partial z_x}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}}\right)_x - \partial\left(\frac{\lambda.\partial z_y}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}}\right)_y = 0$$

und

$$\text{II.}\quad \partial^{1,1}\lambda_{x,y} = 0, \qquad \text{d. h.}\quad \lambda = X_x + Y_y,$$

wo $X_x$ eine willkührliche Funktion von x, und $Y_y$ eine willkührliche Funktion von y vorstellt.

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen zunächst $\lambda$, so erhält man die Gleichung zwischen z, y und x, für die gesuchte Oberfläche, deren allgemeines Integral, außer $X_x$ und $Y_y$, welche sogleich noch näher bestimmt werden können, noch zwei willkührliche Funktionen in sich aufnimmt. Hat man nun die noch unbestimmten Funktionen $X_x$ und $Y_y$ in $\lambda$ so gedacht, daß in dem Ausdrucke für $\delta V$ in (6.) die unter dem einfachen Integralzeichen mit $\delta z_b$, $\delta z_a$, $\delta z_\beta$, $\delta z_\alpha$ (wo immer b und a statt x, dagegen $\beta$ und $\alpha$ statt y gesetzt werden) behafteten Glieder ebenfalls eliminirt d. h. Null sind, so giebt die Gleichung $\delta V = 0$, wenn $\delta u_b$, $\delta u_a$, $\delta u_\beta$, $\delta u_\alpha$ keinen weiteren Bedingungen zu genügen haben, sogleich auch noch

$$\partial\lambda_y = \partial Y_y = 0 \quad \text{und} \quad \partial\lambda_x = \partial X_x = 0,$$

also

$$\lambda = \textit{Constante.}$$

Das letzte Glied in $\delta V$, nämlich $[\lambda_{x,y}\cdot\delta u_{x,y}]_{b\div a,\beta\div\alpha}$ wird nun offenbar, da $\lambda$ konstant ist,

$$= \lambda\cdot[\delta u_{x,y}]_{b\div a,\beta\div\alpha}$$

während die Bedingung, daß innerhalb der vorgezeichneten Grenzen die Oberfläche u der Oberfläche $u_\varkappa$ gleich seyn soll, zur Gleichung

$$[\delta u_{x,y}]_{b \div a, \beta \div \alpha} = 0$$

führt, so daß dieser letztere vom Integralzeichen ganz befreite Theil von $\delta V$ identisch der Null gleich ist, die Konstante $\lambda$ also zur Zeit noch unbestimmt bleibt.

Die gesuchte Gleichung zwischen $z$, $y$ und $x$ ist daher dasmal die (I.) selbst, wenn in ihr $\lambda$ konstant gedacht wird, also die Gleichung

$$(\odot)\cdots \quad \frac{1}{\lambda} - \partial\left(\frac{\partial z_x}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}}\right)_x - \partial\left(\frac{\partial z_y}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}}\right)_y = 0,$$

welcher die Urgleichung der Kugel

$$(\mathfrak{C}) \qquad (x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2 = 4\lambda^2$$

genügt, während jedoch ihr allgemeines Integral mit den beigehenden willkührlichen Funktionen an die Stelle dieses besonderen Integrals ($\mathfrak{C}$) gesucht werden muß, damit diese willkührlichen Funktionen, allen übrigen Nebenbedingungen der Aufgabe gemäß, noch näher bestimmt werden können, während das besondere Integral ($\mathfrak{C}$) nur dann die Aufgabe lösen wird, wenn diese Nebenbedingungen gerade so gestellt sind, daß das allgemeine Integral nun gerade in dieses besondere übergeht.

Da der Zweck dieser Schrift und der hier in selbiger gegebenen Uebungs-Aufgaben kein anderer ist, als in das Studium der Mathematik gründlich und vollständig einzuleiten, und den, welcher sich derselben bedient, zu befähigen und in den Stand zu setzen, die Schwierigkeiten, welche sich überall entgegenstellen, wahrnehmen zu können, so wie im Allgemeinen sich der Mittel bewußt zu seyn, durch welche man versuchen kann, selbige zu überwinden; — so können wir hier nur noch bemerken, daß man dieselben beiden letztern Aufgaben in einzelnen besondern Fällen mit ziemlichem Erfolge behandelt hat, daß aber über diese besonderen Fälle hinaus die Integration Schwierigkeiten begegnet, welche für den Zweck der weiteren Behandlung bis jetzt unüberwindlich geschienen haben und scheinen.

## Aufgabe 31.

Es soll in einer Vertikal-Ebene die Kurve gefunden werden, so daß der in ihr fallende Körper in jedem ihrer Punkte die größeste Geschwindigkeit habe.

Ist $OP = x$ (Fig. 13.) die vertikale Abscisse, $PM = y_x$ die gesuchte (horizontale) Ordinate, $y_x$ die Ordinate der nächsten Nachbarkurven, V das Quadrat der Geschwindigkeit in dem zur Abscisse x gehörigen Punkte, g die Schwere, und setzt man voraus, daß das Mittel im Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit wiederstehe, so ist, nach den dynamischen Prinzipien, und wenn die Ordinaten-Axe oberhalb liegt, so daß die Abscisse in der Richtung der Schwere läuft, V gegeben durch die Differenzialgleichung

$$1)\quad \partial V_x - 2g + 2mV\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2} = F = 0, \text{ *)}$$

so daß man hier das Verfahren (§. 477. N. XII.) anwenden muß.

Also ist hier

$$2)\quad \partial F_V = 2m\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}, \qquad 3)\quad \partial F_{V_1} = 1$$

und

$$4)\quad M = \lambda\cdot\left(2mV\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\cdot\partial\delta y\right).$$

Die Gleichung $\delta V_b = 0$ des (§. 477. XII.) giebt daher dasmal

$$5)\quad \int_{b\div a} 2m\lambda V\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\cdot\partial\delta y\cdot dx = 0,$$

d. h.

$$6)\quad 0 = \left[2m\lambda V\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\cdot\delta y\right]_{b\div a} - \int_{b\div a}\partial\left(2m\lambda V\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right)\cdot\delta y\cdot dx,$$

während $\lambda$ gegeben ist durch die Gleichung (§. 477. XII. 5.), nämlich durch die Gleichung

---

*) Wie diese Gleichung gefunden wird, ist aus der Aufgabe (21.) zu ersehen. Die dort für u gefundene ($\mathfrak{C}_1$) ist wesentlich dieselbe, und der kleine Unterschied rührt von der andern Lage der Axen her.

7) $$2m\lambda\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}-\partial\lambda_x=0,$$

so daß man hat

8) $$\frac{\partial\lambda_x}{\lambda}=2m\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2},\quad\text{also}\quad\lambda_x=e^{\int 2m\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx}.$$

Die Gleichung (6.) zerfällt in

9) $$2m\cdot\lambda_b\cdot V_b\cdot\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_b\cdot\delta y_b-2m\cdot\lambda_a\cdot V_a\cdot\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_a\cdot\delta y_a=0$$

und in die andere, deren Integral

10) $$2m\lambda\cdot V\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}=c$$

ist. Diese giebt aber, wenn man statt $\lambda$ seinen Werth aus (8.) setzt,

11) $$2mV\cdot\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\cdot e^{\int 2m\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx}=c$$

oder

12) $$V=\frac{c}{2m}\cdot\frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{\partial y_x}\cdot e^{-\int 2m\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx}.$$

Differenziirt man nun dieses V nach allem x, und setzt man dann diese Werthe statt V und $\partial V_x$ in die (1.), so hat man die gesuchte Gleichung zwischen y und x, deren Konstanten jedoch der Gleichung (9.) noch unterworfen werden müssen.

Es ist aber bequemer, von der Gleichung (11.) links und rechts die Logarithmen zu nehmen, und diese neue Gleichung

13) $$log\,V+log\,\partial y_x-\tfrac{1}{2}log(1+\partial y_x^2)+\int 2m\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx=log\,\frac{c}{2m}$$

erst zu differenziiren, um

14) $$\frac{\partial V_x}{V}+\frac{\partial^2 y_x}{\partial y_x}-\frac{\partial y_x\cdot\partial^2 y_x}{1+\partial y_x^2}+2m\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}=0$$

zu erhalten. Wenn nun aus dieser und aus der Gleichung (1.) $\partial V_x$ eliminirt wird, so hat man:

15) $$V=-\frac{2g\cdot\partial y_x\cdot(1+\partial y_x^2)}{\partial^2 y_x}.$$

Differenziirt man endlich diese Gleichung (15.) nach allem

x, um $\partial V_x$ zu erhalten, und setzt man diese Werthe in die Gleichung (1.) statt V und $\partial V_x$, so erhält man wieder die gesuchte Differenzialgleichung zwischen y und x, welche von der dritten Ordnung seyn wird, so daß ihre Integration 3 willkührliche Konstanten einführt.

Um nun diese Endgleichung sogleich um einen Grad niedriger zu erhalten, so führe man, da solche den Veränderlichen y selbst nicht enthält, einen neuen Veränderlichen p ein mittelst der Gleichung

16) $$\partial y_x = p.$$

Und um die Rechnungen einfacher zu machen, welches von der größern oder geringern Einfachheit des Ausdrucks für V in (15.) abhängt, so führe man noch einen neuen Veränderlichen z ein mittelst der Gleichung

17) $$-\frac{2y}{\partial^2 y_x} = z \quad \text{oder} \quad 2y + z \cdot \partial p_x = 0.$$

Die Gleichung (15.) wird dann

18) $$V = z \cdot p \cdot (1 + p^2);$$

und daraus erhält man

19) $$\partial V_x = p \cdot (1 + p^2) \cdot \partial z_x + z \cdot \partial p_x \cdot (1 + 3p^2).$$

Diese Werthe aus (18. und 19.), statt V und $\partial V_x$ in die Gleichung (1.) substituirt, geben nun

20) $$\partial z_x \cdot p \cdot (1 + p^2) + z \cdot \partial p_x \cdot (1 + 3p^2) - 2g + 2m \cdot (1 + p^2)^{\frac{3}{2}} \cdot z \cdot p = 0,$$

welche Gleichung die gesuchte ist, sobald z und p eliminirt werden. Macht man nun den Versuch, diese Gleichung als eine totale Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen den 3 Veränderlichen z, p und x zu integriren, so muß man sie so lange umformen, bis sie den im (§. 396. d. VI. Th. d. S.) aufgestellten Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität genügt. Schafft man zu dem Ende aus (20. und 19.) g weg, so erhält man

21) $$\partial z_x \cdot p \cdot (1 + p^2) + z \cdot \partial p_x \cdot (2 + 3p^2) + 2m \cdot (1 + p^2)^{\frac{3}{2}} \cdot z \cdot p = 0.$$

Von dieser Gleichung geben die zwei ersten Glieder ein vollständiges Differenzial, wenn man sie durch

$$z^2 \cdot p^3 \cdot (1+p^2)^{\frac{3}{2}}$$

dividirt. Die Gleichung (21.) wird dann

22) $$\partial\left(\frac{1}{z \cdot p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{2m}{z \cdot p^2} = 0.$$

Damit nun hier der 2te Theil $\frac{2m}{z \cdot p^2}$ ebenfalls ein vollständiges Differenzial werde, so substituire man in ihm statt z seinen Werth $-\frac{2g}{\partial p_x}$ aus (17.), und die Gleichung (22.) wird nun folgende:

23) $$\partial\left(\frac{1}{z \cdot p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}\right) + \frac{m \cdot \partial p_x}{g \cdot p^2} = 0$$

und giebt, integrirt,

24) $$\frac{1}{z \cdot p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}} - \frac{m}{g \cdot p} = c_1.$$

Setzt man aber hier statt z wiederum seinen Werth $-\frac{2g}{\partial p_x}$, so geht diese Gleichung (24.) in eine Differenzialgleichung zwischen p und x über von der ersten Ordnung, in welcher die Veränderlichen sogleich getrennt werden können, so daß man erhält:

25) $$1 = -\frac{\partial p_x}{p \cdot \sqrt{1+p^2} \cdot (2m + 2g \cdot c_1 \cdot p)'}$$

woraus, wenn mit $\partial y_x = p$ multiplizirt wird, noch überdies

26) $$\partial y_x = -\frac{\partial p_x}{\sqrt{1+p^2} \cdot (2m + 2g \cdot c_1 \cdot p)}$$

hervorgeht. Und nimmt man hier in (25.) und (26.) links und rechts die Integrale, so geht hervor

27) $$x = -\int \frac{\sqrt{1+p^2}}{p \cdot (1+p^2) \cdot (2m + 2g \cdot c_1 \cdot p)} \cdot dp,$$

28) $$y = -\int \frac{\sqrt{1+p^2}}{(1+p^2) \cdot (2m + 2g \cdot c_1 \cdot p)} \cdot dp.$$

Die Elimination von p zwischen (27.) und (28.) führt dann

zur Urgleichung zwischen x und y mit den 3 willkührlichen Konstanten. — Aus (15.) findet sich dann V dazu. Eine der 3 Konstanten wird zuletzt durch die Bedingung bestimmt, daß $V_a \equiv 0$ seyn muß. Die beiden andern Konstanten dagegen müssen der Gleichung (9.) unterworfen werden. *)

## Noch einige gemischte Uebungs-Aufgaben.

### Aufgabe 32.

Suchen wir noch einmal die Brachystochrone, d. h. die Kurve des schnellsten Falles, wie solche bereits in den Aufgaben (21. und 22.) gesucht worden ist. Suchen wir namentlich die Kurve, welche einem schweren Punkte zur festen Bahn gegeben werden müßte, damit er in einer vertikalen Ebene von einer gegebenen Kurve CAD (Fig. 13.) zu einer andern gegebenen Kurve EBF in der kürzesten Zeit gelange, unter der Voraussetzung jedoch, daß der Widerstand des Mittels eben sowohl als die Reibung ganz außer Acht gelassen werden sollen, und daß die Geschwindigkeit im Anfangspunkte A der gesuchten Bahn und aller möglichen nächsten Nachbarbahnen allemal Null ist.

Es sey die Abscissen-Axe OX vertikal und in der Richtung der Schwere, OY dagegen horizontal. Ferner seyen $OP = x$, $PM = y = y_x$ die Koordinaten eines Punktes M der gesuchten Kurve AMB, während die gesuchten Abscissen $OA_1$ und $OB_1$ der Grenzpunkte A und B dieser Bahn beziehlich durch a und b ausgedrückt seyn mögen. Die Gleichungen der Grenzkurven CAD und EBF seyen beziehlich durch

$$\psi_{x',y'} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{x,y} = 0$$

vorgestellt. Der Bogen AM sey $= s$ und die Geschwindigkeit in M, $= v$.

---

*) Hätte man in der Aufgabe den Widerstand nicht $= m \cdot V$, sondern $= m \cdot V^n$ angenommen, so würde die Rechnung nur geringe Abänderungen erlitten und zuletzt zu ganz analogen Endgleichungen, wie die (27. und 28.), geführt haben.

Bei dieser Anordnung hat man statt der Gleichungen (1. und 2.) der Aufgabe (21.) jetzt die Gleichungen:

$$1)\quad \partial^2 y - N\cdot\frac{\partial x}{\partial s} = 0 \qquad \text{und} \qquad 2)\quad \partial^2 x + N\cdot\frac{\partial y}{\partial s} - g = 0,$$

während noch immer

$$3)\quad \partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2 = v^2$$

ist, sobald nur alle Ableitungszeichen $\partial$ sich auf den unabhängigen Veränderlichen t beziehen, welcher die Zeit vorstellen mag.

Eliminirt man nun N aus (1. u. 2.), so erhält man

$$\partial(\partial x^2 + \partial y^2) = 2g\cdot\partial x \quad \text{oder} \quad \partial x^2 + \partial y^2 = 2g\cdot x + C,$$

d. h. nach (3.)

$$4)\quad v^2 = 2g\cdot x + C = 2g\cdot(x - a),$$

wo die Konstante C so bestimmt worden ist, daß die Geschwindigkeit Null wird für $x = a$, wie solches der Aufgabe zufolge seyn soll.

Da nun

$$t = \int 1\cdot dt = \int 1\cdot \partial t_x\cdot dx$$

ist, und aus den Gleichungen (3. und 4.)

$$\partial t_x = \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{v} = \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{\sqrt{2g\cdot(x-a)}}$$

hervorgeht, so hat man dasmal, wenn V den Ausdruck bedeutet, welcher das Minimum werden soll, nämlich die Zeit von $x = a$ bis $x = b$,

$$5)\quad V = \int_{b\div a} \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{\sqrt{2g\cdot(x-a)}}\cdot dx.$$

Ist nun $y_\varkappa$ die zu der Abscisse x gehörige Ordinate der nächsten Nachbarkurven, und sind $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ beziehlich die Abscissen ihrer Grenzpunkte; so ist die zu der Abscisse x gehörige Geschwindigkeit $v_\varkappa$ nach (4.), da die zur Abscisse $a_\varkappa$ gehörige Geschwindigkeit, der in der Aufgabe gemachten Voraussetzung zufolge, Null werden soll, gegeben durch die Gleichung

$$v_\varkappa^2 = 2g\cdot(x - a_\varkappa),$$

so daß nun

$$6)\quad V_\varkappa = \int_{b_\varkappa \div a_\varkappa} \frac{\sqrt{1+\partial(y_\varkappa)_x^{\,2}}}{\sqrt{2\cdot g(x-a_\varkappa)}}\cdot dx$$

wird,*) wo man aus der Rechnung den konstanten Faktor $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ weglassen kann.

Da nun $\delta V$ gefunden wird, wenn man diese Funktion $V_\varkappa$ nach allem $\varkappa$ differenziirt und dann überall Null statt $\varkappa$ schreibt, so erhält man dasmal

$$7)\quad \delta V =$$

$$\int_{b\div a} \frac{\partial y_x\cdot\partial\delta y}{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot\sqrt{x-a}}\cdot dx + \int_{b\div a} \frac{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot\delta a}{2\cdot(x-a)\cdot\sqrt{x-a}}\cdot dx$$

$$+\left[\frac{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}}{\sqrt{x-a}}\right]_b\cdot\delta b - \left[\frac{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}}{\sqrt{x-a}}\right]_a\cdot\delta a,$$

oder, wenn man hier das erste Integral durch theilweise Integration nach dem Erforderniß des (§. 477. N. V.) umformt:

$$8)\quad \delta V =$$

$$-\int_{b\div a} \partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot\sqrt{x-a}}\right)\cdot\delta y\cdot dx + \left[\frac{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}}{\sqrt{x-a}}\right]_b\cdot\delta b$$

$$+\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot\sqrt{x-a}}\right]_b\cdot\delta y_b - \left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot\sqrt{x-a}}\right]_a\cdot\delta y_a$$

$$+\left(\int_{b\div a} \frac{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}}{2(x-a)\cdot\sqrt{x-a}}\cdot dx - \left[\frac{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}}{\sqrt{x-a}}\right]_a\right)\cdot\delta a.$$

Weil ferner die Koordinatenwerthe $a_\varkappa$ und $[(y_\varkappa)_x]_{a_\varkappa}$ des Grenzpunktes, wenn sie statt $x'$ und $y'$ gesetzt werden, die

*) Diese Gestalt von $V_\varkappa$ ist deshalb merkwürdig, weil hier die variirte Grenze $a_\varkappa$ auch in dem Ausdrucke

$$U_\varkappa = \frac{\sqrt{1+\partial(y_\varkappa)_x^{\,2}}}{\sqrt{2g\cdot(x-a_\varkappa)}}$$

selbst wieder vorkommt.

Gleichung $\psi_{x',y'} = 0$ identisch machen müssen, so hat man noch, wie solches in der Aufgabe (9.) bereits ausführlich nachgewiesen sich findet,

9) $$(\partial\psi_{x'} + \partial\psi_{y'} \cdot \partial y_x) \cdot \delta a + \partial\psi_{y'} \cdot \delta y_a = 0,$$

sobald man nur statt jedes expliziten und implizit vorkommenden $x'$ und $x$ die Abscisse $a$, folglich auch statt $y'$ die Ordinate $y_a$ schreibt.

Aus demselben Grunde hat man noch an der andern Grenze

10) $$(\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y_x) \cdot \delta b + \partial\varphi_y \cdot \delta y_b = 0,$$

wenn nur auch hier $b$ statt $x$ und $x$, so wie $y_b$ statt $y$ gesetzt wird.

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (8. 9. und 10.) die abhängigen $\delta y_a$ und $\delta y_b$, so zerfällt dann die Gleichung $\delta V = 0$ sogleich in die allgemeine Gleichung

I. $$\partial\left(\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot \sqrt{x-a}}\right) = 0$$

und in die beiden Grenzgleichungen

$$-\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot \sqrt{x-a}} \cdot (\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y_x) + \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{\sqrt{x-a}} \cdot \partial\varphi_y = 0$$

d. h. II. $$-\partial y_x \cdot \partial\varphi_x + \partial\varphi_y = 0,$$

wo $b$ unter $x$ und $x$, dagegen $y_b$ unter $y$ zu verstehen ist; so wie

III. $$0 = \partial\psi_{x'} \cdot \frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot \sqrt{x-a}} + \partial\psi_{y'} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot \sqrt{x-a}} + \int_{b \div a} \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{2(x-a) \cdot \sqrt{x-a}} \cdot dx\right],$$

wenn nur in allen Gliedern dieser Gleichung, welche außerhalb des $\int$ Zeichens vorkommen, die Koordinatenwerthe $a$ und $y_a$ statt der Koordinatenzeichen $x'$, $x$ und $y'$ substituirt werden.

Die Gleichung (I.) einmal integrirt giebt

11) $$\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot\sqrt{x-a}} = \sqrt{c},$$

wo wir die Konstante durch $\sqrt{c}$ vorgestellt haben. Wird diese Gleichung (11.) nun zur weiteren Integration nach $\partial y_x$ algebraisch aufgelößt, so erhält man

12) $$\partial y_x = \sqrt{\frac{c\cdot(x-a)}{1-c\cdot(x-a)}},$$

und dies ist wiederum die Gleichung einer Zykloide, deren Erzeugungskreis den Durchmesser $\frac{1}{c}$ hat. — Die Gleichung (II.) zeigt an, daß diese Zykloide auf der Grenzkurve EBF senkrecht steht. Setzt man endlich diesen Werth von $\partial y_x$ aus (12.) in die Gleichung (III.), so kann das dortige Integral ausgewerthet werden in b und in a, und die Gleichungen (II. u. III.) dienen dann im Allgemeinen und in Verbindung mit den Gleichungen der Grenzkurven, welche zwischen den Koordinatenwerthen $a$, $y_a$, $b$ und $y_b$ der Grenzpunkte A und B ebenfalls statt finden müssen, zur Bestimmung der beiden Konstanten $c$ und $c_1$, welche die Integration der (I.) einführt, und der beiden Abscissenwerthe a und b. — Weil aber aus (12.) offenbar

13) $$[\partial y_x]_a = 0$$

hervorgeht, so sehen wir, daß die gefundene Zykloide an der erstern Grenze eine vertikale Tangente hat. Ferner findet sich, wenn man integrirt, zuvor aber statt $\partial y_x$ seinen Werth subtituirt,

14) $$\int_{b\div a} \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{2(x-a)\cdot\sqrt{(x-a)}}\cdot dx = -\left[\frac{\sqrt{(x-a)-c(x-a)^2}}{x-a}\right]_b + \left[\frac{\sqrt{(x-a)-c(x-a)^2}}{x-a}\right]_a.$$

Subtituirt man nun wirklich diesen Werth statt des angezeigten Integrals in die Gleichung (III.), so verbindet sich der zweite Theil dieses Werthes mit dem dortigen Gliede

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot\sqrt{x-a}},$$

in welchem ebenfalls a statt x gesetzt werden muß, und beide geben Null; so daß die Gleichung (III.) jetzt wird (besonders wegen 11.)

$$15) \quad \partial\psi_{x'} \cdot \sqrt{c - \partial\psi_{y'}} \cdot \sqrt{\frac{1-c\cdot(b-a)}{b-a}} = 0,$$

wo jedoch immer a und $y_a$ statt $x'$ und $y'$ gesetzt werden müssen. Diese Gleichung (15.) läßt sich, vermöge der (12.), auch so schreiben

$$16) \quad [\partial\psi_{x'}]_a \cdot [\partial y_x]_b - [\partial\psi_{y'}]_a = 0,$$

und aus dieser Form der Gleichung erhellet, daß die Tangente an die Grenzkurve CAD, im Anfangspunkte A der Bahn, senkrecht steht auf der Tangente der Bahn AMB, in ihrem Endpunkte B gezogen, daß also die Tangenten an den Grenzkurven in A und in B mit einander parallel laufen.

## Aufgabe 33.

In den Aufgaben (21. 22. und 32.) ist vorausgesetzt worden, daß die gesuchte Brachystochrone in einer Ebene liegt. — Nun sey aber dieselbe Aufgabe (21.) noch einmal gegeben, unter der Voraussetzung jedoch, daß die gesuchte Kurve nicht nothwendig in einer und derselben Ebene liege. Der Wiederstand ist also nun wieder das mfache des Quadrats der Geschwindigkeit, die Reibung dagegen nicht berücksichtigt.

Denkt man sich hier die Axe der x vertikal, und von oben nach unten, dagegen die Axen der y und der z horizontal, so hat man aus den 3 Gleichungen der Bewegung, welche die Dynamik dasmal liefert, ganz so verfahrend, wie in der Aufgabe (21.), wenn die kürzeste Zeit durch V, die Abscissen der Endpunkte der Bahn durch a und b vorgestellt sind,

$$1) \quad V = \int_{b\div a} \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}{\sqrt{u}} \cdot dx,$$

während zwischen dem Quadrate der Geschwindigkeit $u_x$ und den Koordinaten $y_x$ und $z_x$ noch die Gleichung statt findet

$$2) \quad \partial u_x - 2g + 2m\cdot u\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2} = 0.$$

Diese Gleichung (2.) muß zwischen den zu der Abscisse x gehörigen Koordinaten $y''$, $z''$ der nächsten Nachbarkurven, und zwischen dem zu derselben Abscisse x gehörigen Quadrate $u''$ der Geschwindigkeit eben so statt finden, wie sie zwischen y, z und u in (2.) wirklich Statt hat.

Nach der Methode (§. 477. N. VII.) nimmt man nun

$$3)\quad V=\int_{b\div a}\left(\frac{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}{\sqrt{u}}+\lambda\cdot(\partial u_x-2g+2mu\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}})\right)dx,$$

also

$$4)\quad \delta V=\int_{b\div a}-\partial\left(\frac{(1+2\lambda mu\cdot\sqrt{u})\cdot\partial y_x}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}\right)\cdot\delta y\cdot dx+\int_{b\div a}-\partial\left(\frac{(1+2\lambda mu\cdot\sqrt{u})\cdot\partial z_x}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}\right)\cdot\delta z\cdot dx$$
$$+\int_{b\div a}\left(2\lambda m\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}-\frac{\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}{2u\cdot\sqrt{u}}-\partial\lambda_x\right)\cdot\delta u\cdot dx$$
$$+\left[\frac{(1+2\lambda mu\cdot\sqrt{u})\partial y_x}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}\cdot\delta y\right]_{b\div a}+\left[\frac{(1+2\lambda mu\cdot\sqrt{u})\cdot\partial z_x}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}}\cdot\delta z\right]_{b\div a}$$
$$+\lambda_b\cdot\delta u_b-\lambda_a\cdot\delta u_a.$$

Denkt man sich nun, um $\delta u$ zu eliminiren, $\lambda$ als diejenige Funktion von x, welche den Koeffizienten von $\delta u$ unter dem Integralzeichen zu Null macht, so liefert die Gleichung $\delta V = 0$ sogleich (da y und z von einander ganz unabhängig sind) die Koeffizienten von $\delta y$ und von $\delta z$ unter den Integralzeichen der Null gleich, so daß man die 3 Gleichungen hat:

I. $\dfrac{(1+2\lambda mu\cdot\sqrt{u})\cdot\partial y_x}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}} = c$

II. $\dfrac{(1+2\lambda mu\cdot\sqrt{u})\cdot\partial z_x}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}} = c_1$

} wo statt der Differenzialgleichungen sogleich die Integrale mit den willkührlichen Konstanten c und $c_1$ genommen sind,

und

III. $2\lambda m\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2} - \dfrac{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}{2u\cdot\sqrt{u}} - \partial\lambda_x = 0.$

Eliminirt man aber nun aus diesen 3 Gleichungen (I. II. und III.) in Verbindung mit der Gleichung (2.), sowohl u als auch $\lambda$ (nach §. 282. d. V. Th. d. S.), so erhält man die 2 Gleichungen zwischen y, z und x, welche nach (§. 281. d. V. Th. d. S.) integrirt, y, z und dann auch u und $\lambda$ mit 4 willkührlichen Konstanten geben, außer den obigen beiden c und $c_1$, während die Anfangsgeschwindigkeit $\sqrt{u_a}$ oder $u_a$ gegeben oder noch Bedingungen unterworfen seyn kann, so daß $\partial u_a$ nicht als unabhängig angesehen werden kann. Wenn also durch die Bedingung, welcher die Anfangsgeschwindigkeit unterworfen ist, eine der 6 willkührlichen Konstanten bestimmt wird, so reduziren sich dagegen die 6 Grenzglieder in $\delta V$ der (4.) sogleich auf nur 5 Glieder, und diese müssen nun zur Bestimmung der 5 übrigen Konstanten nach Maaßgabe der verschiedenen Bedingungen, denen die Aufgabe an den Grenzen der Kurve noch unterworfen seyn kann (wie solches in den früheren Aufgaben zergliedert sich findet), verwandt werden.

Da übrigens die Gleichungen (I. und II.) durch einander dividirt zur Gleichung

5) $\dfrac{\partial y_x}{\partial z_x} = \dfrac{c}{c_1}$ oder 6) $c_1\cdot\partial y_x - c\cdot\partial z_x = 0$

oder 7) $c_1\cdot y - c\cdot z = c_2$

führen, so erhellet zugleich, daß für jeden Punkt der Kurve die Koordinaten y und z desselben, den Punkten einer vertikalen Ebene entsprechen; daß also die gesuchte Kurve eine einfach gekrümmte wird, und in einer vertikalen Ebene liegt. Sind daher die Endpunkte der gesuchten Bahn gegeben, so liegt letztere ganz

in der durch diese beiden Endpunkte gegebenen vertikalen Ebene, und man kann die Aufgabe sogleich auf die frühere einfachere zurückführen, indem man in dieser Ebene selber die Axen der x und der y nimmt. — Sind aber die Endpunkte nicht gegeben, so kann man wenigstens die Rechnung dadurch vereinfachen, daß man statt der (I. oder II.) die (5. 6. oder 7.) in die Rechnung nimmt, also z. B. aus (I. III. 7. u. 2.) y, z, $\lambda$ und u findet. Es ergiebt sich dann sogleich, weil man nach (6. oder 7.) statt $\partial z_x$ durchaus $\frac{c_1}{c} \cdot \partial y_x$ setzen kann,

$$8)\quad 2g \cdot \partial\lambda_x + c \cdot \frac{\partial^2 y_x}{\partial y_x^2} = 0,$$

also $$9)\quad 2g \cdot \lambda + \frac{c}{\partial y_x} = c_2, \text{ also } \lambda = \frac{c_2 \cdot \partial y_x - c}{2g \cdot \partial y_x},$$ *)

und so läßt sich $\lambda$ leicht ganz wegbringen.

Uebrigens wäre diese Auflösung nicht verwickelter geworden, wenn man den Widerstand $= \varphi_u$ vorausgesetzt hätte, unter $\varphi_u$ jede beliebige Funktion von u verstanden, während u das Quadrat der Geschwindigkeit vorstellt.

Wird übrigens wieder zur Bedingung gemacht, daß die Endpunkte aller nächsten Nachbarkurven, so wie die der gesuchten selbst, auf einer gegebenen Kurve liegen sollen, so findet man wieder mittelst einer der zur Bestimmung der Konstanten dienenden Gleichungen, daß die Bahn auf dieser Grenzkurve senkrecht steht; u. s. w. f.

## Aufgabe 34.

Denkt man sich dieselbe Aufgabe noch einmal, jedoch mit der neuen Bedingung, daß die gesuchte Kurve auf einer durch die Gleichung

---

*) Schafft man durchgehends $\partial y_x$ weg, so findet sich zuletzt auch

$$2g \cdot \partial\lambda_x + c_1 \cdot \frac{\partial^2 z_x}{\partial z_x^2} = 0,$$

aus welcher jedoch in Verbindung mit der (5. 6. 7.) sogleich wieder die obige (8.) hervorgeht.

10) $F_{x,y,z} = 0$

gegebenen Fläche liegen soll; so sind jetzt $\delta z$ und $\delta y$ nicht mehr von einander unabhängig, und man muß daher, um auch noch $\delta z$ zu eliminiren, zu dem Ausdrucke für V in (3.) nach (§. 477. N. VII.) noch das Glied $\int_{b\div a} \mu \cdot F \cdot dx$, daher zu dem Ausdrucke für $\delta V$ in (4.) noch die Glieder

$$\int(\mu \cdot \partial F_y \cdot \delta y + \mu \cdot \partial F_z \cdot \delta z) \cdot dx$$

hinzufügen, so daß der Koeffizient von $\delta y$ um das Glied $\mu \cdot \partial F_y$, der Koeffizient von $\delta z$ dagegen um $\mu \cdot \partial F_z$ vermehrt wird. Dann muß man $\lambda$ und $\mu$ sich so bestimmt denken, daß die mit $\delta u$ und $\delta z$ behafteten Glieder unter dem Integralzeichen in dem Ausdrucke für $\delta V$, verschwinden; und die Gleichung $\delta V = 0$ giebt dann auch noch den Koeffizienten von $\delta y$ der Null gleich, so daß man wiederum 3 Gleichungen hat, nämlich:

I. $$\partial\left(\frac{(1+2\lambda mu \cdot \sqrt{u}) \cdot \partial y_x}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right) - \mu \cdot \partial F_y = 0$$

II. $$\partial\left(\frac{(1+2\lambda mu \cdot \sqrt{u}) \cdot \partial z_x}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}\right) - \mu \cdot \partial F_z = 0$$

und

III. $$2\lambda m \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2} - \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}}{2u \cdot \sqrt{u}} - \partial\lambda_x = 0,$$

welche drei Gleichungen in Verbindung mit den beiden gegebenen Gleichungen (2. und 10.) jetzt zur Bestimmung der 5 Unbekannten $\lambda$, $\mu$, u, y und z in x dienen.

Ist die gegebene Fläche $F = 0$ eine Kugelfläche, gegeben durch die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2-r^2 = 0,$$

so hat man $\partial F_y = 2y$ und $\partial F_z = 2z$;

und es muß daher dann in (I. und II.) hier, 2y und 2z beziehlich statt $\partial F_y$, $\partial F_z$ gesetzt werden.

Ist die gegebene Fläche $F = 0$ eine schiefe Ebene, also daß

$$F = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z - D = 0$$

ist, so hat man $\partial F_y = B$, $\partial F_z = C$; —

und die Gleichungen (I. und II.) werden jetzt, wenn man der Kürze wegen

$$1') \qquad \frac{1+2\lambda mu\cdot\sqrt{u}}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}} = \psi_x$$ setzt,

$$2') \qquad \partial(\psi_x\cdot\partial y_x)-B\cdot\mu = 0$$

$$3') \qquad \partial(\psi_x\cdot\partial z_x)-C\cdot\mu = 0,$$

während man

$$4') \qquad A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z-D = 0$$

und noch

$$5') \qquad A+B\cdot\partial y_x+C\cdot\partial z_x = 0$$

hat. Setzt man nun in (3'.) statt $\partial z_x$ seinen Werth $-\frac{A}{C}-\frac{B}{C}\cdot\partial y_x$ aus (5'.), so erhält man

$$6') \qquad -\frac{A}{C}\cdot\partial\psi_x-\frac{B}{C}\cdot\partial(\psi_x\cdot\partial y_x)-C\cdot\mu = 0.$$

Und addirt man dazu die Gleichung (2'.), nachdem man vorher mit B multiplizirt hat, so ergiebt sich:

$$7') \qquad -A\cdot\partial\psi_x-(B^2+C^2)\cdot\mu = 0 \quad \text{oder} \quad \mu = -\frac{A}{B^2+C^2}\cdot\partial\psi_x.$$

Dadurch gehen die Gleichungen (2'. und 3'.) über in

$$8') \quad \partial(\psi_x\cdot\partial y_x)+\frac{AB}{B^2+C^2}\cdot\partial\psi_x = 0, \quad \text{oder} \quad \psi_x\cdot\left(\partial y_x+\frac{AB}{B^2+C^2}\right) = c,$$

$$9') \quad \partial(\psi_x\cdot\partial z_x)+\frac{AC}{B^2+C^2}\cdot\partial\psi_x = 0 \quad \text{oder} \quad \psi_x\cdot\left(\partial z_x+\frac{AC}{B^2+C^2}\right) = c_1,$$

wo c und $c_1$ zwei willkührliche Konstanten sind; woraus dann, wenn man diese beiden Gleichungen durch einander dividirt,

$$10') \qquad \frac{(B^2+C^2)\cdot\partial y_x+AB}{(B^2+C^2)\cdot\partial z_x+AC} = \frac{c}{c_1}$$

hervorgeht, welche Gleichung mit der gegebenen (4'. oder 5'.) in Verbindung, zur Bestimmung von y und z dient. Sie geben

$$11') \qquad y+\frac{AB}{B^2+C^2}\cdot x+c_2 = 0$$

und

$$12') \qquad z+\frac{AC}{B^2+C^2}\cdot x+c_3 = 0,$$

wo aber zwischen den Konstanten $c_2$ und $c_3$ die für diese Werthe von y und z aus (4'.) hervorgehende Gleichung

$$13') \qquad B\cdot c_2+C\cdot c_3+D = 0$$

statt findet, so daß die eine dieser Konstanten in die andere ausgedrückt werden kann, und nur eine derselben willkührlich bleibt.

Die auf der schiefen Ebene gesuchte Kurve ist also dasmal eine gerade Linie.

Ist aber die gegebene Ebene vertikal, also $A = 0$, so giebt (7′.) $\mu = 0$, welches nicht seyn darf, weil sonst die Abhängigkeit zwischen $dy$ und $dz$ gar nicht in Rechnung gebracht wäre. Man muß daher diesen Fall direkt behandeln, und man wird dann wieder zur Zykloide geführt werden.

Ohne uns auf die besondere Betrachtung der verschiedenen Aufgaben, die durch Verschiedenheit der Grenz-Bedingungen entstehen, einzulassen, da solches früher (bei den rein geometrischen Aufgaben) bereits näher und hinreichend nahe betrachtet worden ist, gehen wir noch zu andern Aufgaben über.

## Aufgabe 35.

Unter allen Kurven in einer gegebenen Ebene diejenige zu finden, deren Bogen ein Minimum ist, wenn die zu den Endpunkten dieses Bogens gehörigen, von der Abscisse $x = \alpha$ an gerechneten Flächenräume gegeben und beziehlich $= A$ und $= B$ sind.

Ist $x$ die Abscisse, $y$ die Ordinate, $z$ der Inhalt von $x = \alpha$ an bis zu $x = x$ gerechnet, so hat man zwar

$$1) \qquad V = \int_{b \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx,$$

allein, weil die Grenz-Abscissen $a$ und $b$ nicht gegeben sind, und selbst variiren können, so thut man besser, $x$ und $y$ als Funktionen von $z$ anzusehen, und $x_z$, $y_z$ so sich zu denken, daß sie statt $x$ und $y$ gesetzt, der Gleichung

$$\int_{x \div \alpha} y \cdot dx = z \qquad \text{oder} \qquad y - \partial z_x = 0,$$

oder der daraus hervorgehenden Gleichung

$$2) \qquad y \cdot \partial x_z - 1 = 0$$

genügen.

Ferner ist dann zu nehmen

$$V = \int_{b \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx = \int_{B \div A} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot \partial x_z \cdot dz$$

d. h. $$3) \qquad V = \int_{B \div A} \sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2} \cdot dz;$$

demnach nimmt man dem (§. 477. R VII.) zufolge

4) $V = \int_{B\div A} (\sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2} + \lambda \cdot (y \cdot \partial x_z - 1)) \cdot dz$;

und man hat dann

5) $\delta V = \int_{B\div A} \left( \frac{\partial x_z \cdot \partial \delta x + \partial y_z \cdot \partial \delta y}{\sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2}} + \lambda \cdot (\partial x_z \cdot \delta y + y \cdot \partial \delta x) \right) \cdot dz$

d. h. 6) $\delta V =$

$$\int_{B\div A} \partial\left(\frac{\partial x_z}{\sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2}} + \lambda y\right) \cdot \delta x \cdot dz - \int_{B\div A} \left(\partial\left(\frac{\partial y_z}{\sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2}}\right) - \lambda \cdot \partial x_z\right) \cdot \delta y \cdot dz$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial x_z}{\sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2}} + \lambda y\right) \cdot \delta x\right]_{B\div A} + \left[\frac{\partial y_z}{\sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2}} \cdot \delta y\right]_{B\div A}.$$

Man erhält dann weiter aus $\delta V = 0$,

$$\text{I.} \quad \partial\left(\frac{\partial x_z}{\sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2}} + \lambda y\right)_z = 0$$

$$\text{II.} \quad \partial\left(\frac{\partial y_z}{\sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2}}\right)_z - \lambda \cdot \partial x_z = 0,$$

welche in Verbindung mit der (2.) zur Bestimmung von $\lambda$, x und y in z dienen, so daß man zuletzt auch, durch Elimination von z, den Veränderlichen y in x ausgedrückt, d. h. die Gleichung der gesuchten Kurve erhält.

Die Gleichung (I.), integrirt und wenn man aus (2.) $\frac{1}{y}$ statt $\partial x_z$ setzt, giebt

$$7) \quad \frac{1}{y \cdot \sqrt{\frac{1}{y^2} + \partial y_z^2}} + \lambda \cdot y = c,$$

während die Gleichung (II.), wegen $\partial x_z = \frac{1}{y}$, liefert:

$$8) \quad \partial \left( \frac{\partial y_z}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + \partial y_z^2}} \right)_z - \frac{\lambda}{y} = 0.$$

Eliminirt man aber aus diesen beiden Gleichungen $\lambda$, so erhält man, wenn das Resultat noch mit dem integrirenden Faktor $\partial y_z$ multiplizirt wird,

$$9) \quad \partial y_z \cdot \partial \left( \frac{\partial y_z}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + \partial y_z^2}} \right)_z + \frac{\partial y_z}{y \sqrt{\frac{1}{y^2} + \partial y^2}} = \frac{c \cdot \partial y_z}{y^2}.$$

Nimmt man nun hier links und rechts die Integrale, so erhält man, wenn man auf jedes der beiden Glieder die theilweise Integration, d. h. die Formel $\int u \cdot \partial v = uv - \int v \cdot \partial u$ anwendet, weil sich die beiden Ausdrücke unter dem Integralzeichen aufheben,

$$10) \quad \frac{1}{y^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{y^2} + \partial y_z^2}} = \frac{c}{y} + c_1,$$

oder

$$\partial y_z = \frac{1}{y} \cdot \sqrt{\frac{1}{(c + c_1 \cdot y)^2} - 1},$$

woraus in Verbindung mit (2.), weil $\partial x_y = \frac{\partial x_z}{\partial y_z}$ ist, sogleich

$$11) \quad \partial x_y = \frac{c + c_1 \cdot y}{\sqrt{1 - (c + c_1 \cdot y)^2}},$$

also

$$x = -\frac{1}{c_1} \cdot \sqrt{1 - (c + c_1 \cdot y)^2} + c_2$$

d. h.

$$(x - c_2)^2 + \left( y + \frac{c}{c_1} \right)^2 = \left( \frac{1}{c_1} \right)^2$$

hervorgeht, welches wiederum die Gleichung einer Kreislinie ist, die $c_2$ und $-\frac{c}{c_1}$ zu Koordinaten ihres Mittelpunktes und $\pm\frac{1}{c_1}$ zum Radius hat.

Außerdem liefert aber die Gleichung $\delta V = 0$ auch noch die Summe der in (6.) noch außerhalb des Integralzeichens befindlichen Glieder $= 0$, welche Gleichung nun nach Anleitung der frühern Beispiele, den verschiedenen Grenzbedingungen angemessen noch weiter behandelt, und zur Bestimmung der Konstanten $c, c_1, c_2$ benutzt werden muß.

## Aufgabe 36.

Eine Kurve zu finden, deren Inhalt UTVZU (Fig. 11.) zwischen dem zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Bogen TV, ihrer Evolute UZ und den beiden Krümmungshalbmessern TU und VZ ein Minimum ist.

Ist das Doppelte dieses Inhaltes $= V$, so findet sich nach den Gesetzen der Geometrie *)

$$1) \quad V = \int_{b-a} \frac{(1+\partial y_x^2)^2}{\partial^2 y_x} \cdot dx,$$

also

$$2) \quad \delta V = \int_{b-a} \left( \frac{4\cdot(1+\partial y_x^2)\cdot \partial y_x}{\partial^2 y_x} \cdot \partial\delta y - \frac{(1+\partial y_x^2)^2}{\partial^2 y_x^2} \cdot \partial^2 \delta y \right) \cdot dx$$

oder, wenn man dies nach dem (§. 477. N. V.) umformt:

---

*) Es wird nämlich der Inhalt eines von zwei nächst auf einander folgenden Krümmungshalbmessern eingeschlossenen Sektors gefunden, wenn man den Bogen $\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx$ mit dem Krümmungshalbmesser

$$\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}$$

multiplizirt und die Hälfte nimmt. Der gesuchte Inhalt $\frac{1}{2}V$ ist aber die Summe aller dieser unendlich vielen, unendlich kleinen Sektoren zwischen $x = a$ und $x = b$ genommen.

$$3)\quad \delta V = \int_{b\div a} \left(4\partial\frac{(1+\partial y_x^2)\cdot\partial y_x}{\partial^2 y_x} + \partial^2\frac{(1+\partial y_x^2)^2}{\partial^2 y_x^2}\right)\cdot\delta y\cdot dx$$
$$+\left[\left(4\cdot\frac{(1+\partial y_x^2)\cdot\partial y_x}{\partial^2 y_x} + \partial\frac{(1+\partial y_x^2)^2}{\partial^2 y_x^2}\right)\cdot\delta y\right]_{b\div a}$$
$$-\left[\frac{(1+\partial y_x^2)^2}{\partial^2 y_x^2}\cdot\partial\delta y\right]_{b\div a}.$$

Die Gleichung $\delta V = 0$ giebt daher zunächst, wenn man sogleich integrirt:

$$1.\quad 4\cdot\frac{(1+\partial y_x^2)\cdot\partial y_x}{\partial^2 y_x^2} + \partial\left(\frac{(1+\partial y_x^2)^2}{\partial^2 y_x^2}\right) = c$$

oder

$$\frac{8(1+\partial y_x^2)\cdot\partial y_x}{\partial^2 y_x} - \frac{2(1+\partial y_x^2)^2\cdot\partial^3 y_x}{\partial^2 y_x^2} = c\cdot\partial^2 y_x;$$

also, wenn man hier links und rechts die Integrale nach allem x nimmt,

$$4)\quad \frac{2(1+\partial y_x^2)^2}{\partial^2 y_x} = c\cdot\partial y_x + c_1.$$

Von dieser Gleichung findet sich aber wieder das Integral, wenn man $\partial y_x = p$, also $\partial^2 y_x = \partial p_x$ setzt, weil sich dann die Veränderlichen sogleich trennen lassen,

$$5)\quad x = c_2 - \frac{c - c_1\cdot p}{4(1+p^2)} + \tfrac{1}{4}c_1\cdot\frac{1}{Tg}p.$$

Ferner hat man, weil $y = \int\partial y_x\cdot dx = \int p\cdot dx$ ist, wenn man theilweise integrirt,

$$6)\quad y = p\cdot x - \int x\cdot dp;$$

und daraus findet sich wieder, wenn man statt x und $\partial^2 y_x$ ihre Werthe aus (4. und 5.) substituirt,

$$7)\quad y = c_3 - \frac{c\cdot p - c_1\cdot p^2}{4(1+p^2)} + \tfrac{1}{4}c\cdot\frac{1}{Tg}p.$$

Eliminirt man nun aus (5 und 7.) den Ausdruck p, so hat man die Gleichung zwischen y und x mit 4 willkührlichen Konstanten $c$, $c_1$, $c_2$ und $c_3$, und zwar die Gleichung einer Zykloide.

Außerdem giebt aber die Gleichung $\delta V = 0$ noch die

Summe der in (3.) noch außerhalb des Integralzeichens vorhandenen Glieder $= 0$, welche Gleichung nun den vorhandenen Grenzbedingungen gemäß noch weiter (nach Anleitung vorhergehender Beispiele) behandelt werden muß, um aus ihr die Bestimmung der 4 Konstanten zu erhalten.

## Aufgabe 37.

Es soll $V = \int_{b \div a} y^2 \cdot dx$ ein Minimum werden, unter allen Kurven, welche zwischen $x = a$ und $x = b$ einerlei Länge und auch einerlei Flächen-Inhalt haben. *)

Setzt man

1) $\int_{x \div a} y \cdot dx = z$, also $y - \partial z_x = 0$

2) $\int_{x \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx = u$, also $\sqrt{1 + \partial y_x^2} - \partial u_x = 0$,

und nimmt man dann, nach (§. 477. VII.)

3) $V = \int_{b \div a} [y^2 + \lambda \cdot (y - \partial z_x) + \mu \cdot (\sqrt{1 + \partial y_x^2} - \partial u_x)] \cdot dx$,

so hat man

4) $\delta V = \int_{b \div a} \left( 2y \cdot \delta y + \lambda \cdot \delta y - \lambda \cdot \partial \delta z + \mu \cdot \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \cdot \partial \delta y - \mu \cdot \partial \delta u \right) \cdot dx$

oder, nach (§. 477. V.) umgeformt,

5) $\delta V = \int_{b \div a} \left[ 2y + \lambda - \partial \left( \mu \cdot \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \right) \right] \cdot \delta y \cdot dx$

$$+ \int_{b \div a} \left( \partial \lambda_x \cdot \delta z + \partial \mu_x \cdot \delta u \right) \cdot dx$$

$$+ \left[ \mu \cdot \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \cdot \delta y \right]_{b \div a} - [\lambda \cdot \delta z]_{b \div a} - [\mu \cdot \delta u]_{b \div a},$$

während nach der Voraussetzung

---

*) Diese Kurve ist diejenige, welche in der Statik unter dem Namen der elastischen Kurve bekannt ist, weil eine zusammengedrückte Stahlfeder diese Kurve bilden soll. Nach den neuern von Poisson über das Wesen der Elastizität aufgestellten Ansichten dürfte jedoch die elastische Kurve eine von der gewöhnlich so genannten verschiedene seyn.

6) $\delta z_b - \delta z_a = 0$ und 7) $\delta u_b - \delta u_a = 0$

eyn soll. — Die Gleichung $\delta V = 0$ liefert nun

I. $$2y + \lambda - \partial\left(\mu \cdot \frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right) = 0,$$

II. $\partial \lambda_x = 0$, also $\lambda_x = \lambda = const.$,

III. $\partial \mu_x = 0$, also $\mu_x = \mu = const.$,

so daß unter $\lambda$ und $\mu$ Konstanten (nach x) verstanden werden müssen, wodurch die Gleichung (I.) sogleich in

8) $$2y + \lambda = \frac{\mu \cdot \partial^2 y_x}{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

übergeht, und, wenn man sie mit $\partial y_x$ multiplizirt und dann links und rechts die Integrale nimmt,

9) $$y^2 + \lambda \cdot y + c = -\frac{\mu}{\sqrt{1+\partial y_x^2}},$$

also, wenn man hieraus $\partial y_x$, dann aber $\partial x_y = \frac{1}{\partial y_x}$ findet,

10) $$\partial x_y = \frac{y^2 + \lambda \cdot y + c}{\sqrt{\mu^2 - (y^2 + \lambda \cdot y + c)^2}}$$

liefert. Diese (10.) giebt dagegen, wenn man links und rechts die Integrale nach y nimmt, sogleich x in y, also auch y in x mit 4 Konstanten $\lambda$, $\mu$, c und $c_1$.

Von den außerhalb des Integralzeichens in (5.) befindlichen Gliedern heben sich, da $\lambda$ und $\mu$ konstant sind, da also

$$[\lambda \cdot \delta z]_{b \div a} = \lambda \cdot \delta z_b - \lambda \cdot \delta z_a = \lambda \cdot (\delta z_b - \delta z_a) = 0$$

und $$[\mu \cdot \delta u]_{b \div a} = \mu \cdot \delta u_b - \mu \cdot \delta u_a = \mu \cdot (\delta u_b - \delta u_a) = 0$$

sind, (vermöge der Gleichungen 6. und 7.) diese eben angeführten von selbst weg, so daß nur noch

11) $$\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_b \cdot \delta y_b - \left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_a \cdot \delta y_a = 0$$

übrig bleibt, welche zur Bestimmung der Konstanten gebraucht werden kann. Sind dabei $\int_{b \div a} y \cdot dx$ und $\int_{b \div a} \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx$

d. h. ist Inhalt und Länge gegeben, so bestimmen sich zwei der Konstanten schon daraus. Außerdem kann man der Kurve noch zwei andere Bedingungen vorschreiben.

## Aufgabe 38.

Die Kurve zu finden, welche, wenn sich der zu $x = a$ und $x = b$ gehörige Bogen um die Axe der x herumdreht, die kleinste Fläche beschreibt. *)

Diese Fläche ist $2\pi \cdot \int_{b \div a} y \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$, also kann man nehmen

$$1) \qquad V = \int_{b \div a} y \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$$

und hat dann

$$2) \quad \delta V = \int_{b \div a} \left( \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot \delta y + \frac{y \cdot \partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \cdot \partial \delta y \right) \cdot dx$$

d. h.

$$3) \quad \delta V = \int_{b \div a} \left[ \sqrt{1 + \partial y_x^2} - \partial \left( \frac{y \cdot \partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \right) \right] \cdot \delta y \cdot dx + \left[ \frac{y \cdot \partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \cdot \delta y \right]_{b \div a}.$$

Also giebt die Gleichung $\delta V = 0$ jetzt sogleich

$$I. \quad \sqrt{1 + \partial y_x^2} - \partial \left( \frac{y \cdot \partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \right) = 0 \text{ oder } 1 + \partial y_x^2 - y \cdot \partial^2 y_x = 0.$$

Setzt man, um diese zu integriren,

$$4) \quad \sqrt{1 + \partial y_x^2} = \partial z_x, \text{ also } 1 + \partial y_x^2 = \partial z_x^2,$$

so führt die Gleichung (I.) zu

$$5) \qquad z \cdot \partial z_x - y \cdot \partial y_x = c,$$

d. h. wenn man wiederum links und rechts die Integrale nimmt,

$$6) \qquad z^2 - y^2 = 2c \cdot x + c_1.$$

---

*) Diese Aufgabe ist ein besonderer Fall der viel allgemeinern Aufgabe (29.). Die hier gefundene Urgleichung zwischen y und x muß daher zugleich ein besonderes Integral einer Parzialgleichung seyn.

Findet man nun hieraus z in y und x, und dann daraus wieder $\partial z_x$; substituirt man ferner diesen letztern Werth in die (4.), so erhält man eine Gleichung zwischen x, y und $\partial y_x$, welche als das erste Integral der Gleichung (I.) der 2ten Ordnung angesehen werden kann, welche aber zwei Konstanten c und $c_1$ in sich aufgenommen hat, so daß die eine bestimmt oder beide von einander abhängig seyn werden. Nimmt man aber $c = 0$, so genügt diese letztere Gleichung nothwendig noch, weil man sich dann in der Gleichung (5.) die beliebig eingeführte Funktion z gerade so und nicht anders gedacht hat. Dann wird diese letztere Gleichung viel einfacher, kann in eine Gleichung bloß zwischen $\partial x_y$ und y umgeformt werden, liefert $\partial x_y$ bloß in y ausgedrückt und giebt dann sogleich x in y, also auch y in x und zwar, wenn man der Konstante $c_1$ eine schicklichere Form giebt,

$$7) \quad y = \frac{1}{2c} \cdot \left( A \cdot e^{cx} + \frac{1}{A} \cdot e^{-cx} \right),$$

wo c und A die beiden noch willkührlichen Konstanten sind, welche aus den übrigen Bedingungen der Aufgabe und namentlich noch aus dem andern Theil von $\delta V = 0$, nämlich aus

$$8) \quad \left[ \frac{y \cdot \partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \right]_b \cdot \delta y_b - \left[ \frac{y \cdot \partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} \right]_a \cdot \delta y_a = 0,$$

bestimmt werden müssen.

Die gesuchte Kurve ist daher dasmal eine transcendente, und zwar in gewissen Fällen die in der Statik unter dem Namen der Kettenlinie bekannte.

Die Bestimmung der Konstanten führt aber hier fast allemal zu sehr verwickelten transcendenten Gleichungen, so daß man eine Auflösung derselben meist nur auf dem Näherungswege wird versuchen können.

## Aufgabe 39.

Eine Kurve drehe sich wiederum um ihre Axe der x, und beschreibe eine Oberfläche. Wie muß sie beschaffen seyn, damit

der von ihr begrenzte, in der Richtung seiner Axe sich in einem Mittel bewegende Körper den geringsten Widerstand erleide. *)

Ist $y_x$ die gesuchte Ordinate, $(y_x)_x$ die der nächsten Nachbarkurven, so findet sich dasmal

$$1) \qquad V = \int_{b\div a} \frac{y\cdot \partial y_x^3}{1+\partial y_x^2}\cdot dx$$

und

$$2) \quad \delta V = \int_{b\div a} \left[\frac{\partial y_x^3}{1+\partial y_x^2}\cdot \delta y + \left(\frac{3\cdot \partial y_x^2 + \partial y_x^4}{(1+\partial y_x^2)^2}\right)\cdot y\cdot \partial\delta y\right]\cdot dx$$

d. h.

$$3) \quad \delta V = \int_{b\div a} \left[\frac{\partial y_x^3}{1+\partial y_x^2} - \partial\left(\frac{3y\cdot \partial y_x^2 + y\cdot \partial y_x^4}{(1+\partial y_x^2)^2}\right)\right]\cdot \delta y\cdot dx$$

$$+\left[\left(\frac{3\cdot y\cdot \partial y_x^2 + y\cdot \partial y_x^4}{(1+\partial y_x^2)^2}\right)\cdot \delta y\right]_{b\div a}.$$

Die Gleichung $\delta V = 0$ liefert daher jetzt

$$4) \qquad \frac{\partial y_x^3}{1+\partial y_x^2} - \partial\left(\frac{3y\cdot \partial y_x^2 + y\cdot \partial y_x^4}{(1+\partial y_x^2)^2}\right) = 0,$$

welches eine Differenzialgleichung der 2ten Ordnung ist und demnach y in x mit 2 willkührlichen Konstanten liefert.

Hätte man

$$5) \quad V = \int_{b\div a} W\cdot dx, \qquad \text{und} \qquad 6) \quad \partial y_x = p,$$

also

$$7) \qquad W = \frac{y\cdot p^3}{1+p^2}$$

gesetzt, so hätte man gehabt

$$8) \quad \delta V = \int_{b\div a} (\partial W_y\cdot \delta y + \partial W_p\cdot \partial\delta y)\cdot dx,$$

also

$$9) \quad \delta V = \int_{b\div a} (\partial W_y - \partial(\partial W_p))\cdot \delta y\cdot dx + [\partial W_p\cdot \delta y]_{b\div a},$$

und die Gleichung (4.) wäre geworden

---

*) Diese Aufgabe wurde von Newton gelöst, man weiß nicht auf welchem Wege, ehe noch irgend eine andere Untersuchung dieser Art angestellt worden war.

10) $$\partial W_y - \partial(\partial W_p) = 0.$$

Nun ist aber, wenn man die bloßen $\partial$ nach allem x genommen versteht,

11) $$\partial W = \partial W_y \cdot \partial y + \partial W_p \cdot \partial p_x = \partial W_y \cdot p + \partial W_p \cdot \partial p_x,$$

d. h. wenn man aus (10.) $\partial(\partial W_p)$ statt $\partial W_y$ setzt,

12) $$\partial W = p \cdot \partial(\partial W_p) + \partial W_p \cdot \partial p_x;$$

also, wenn man links und rechts die Integrale nimmt,

13) $$c + W = p \cdot \partial W_p$$

d. h.

14) $$c + \frac{y \cdot \partial y_x^3}{1 + \partial y_x^2} = \frac{3\partial y_x^3 + y \cdot \partial y_x^5}{(1 + \partial y_x^2)^2}.$$

Aus dieser Gleichung findet man nun weiter

15) $$y = \frac{c \cdot (1 + \partial y_x^2)^2}{2\partial y_x^3} = \frac{c \cdot (1 + p^2)^2}{2p^3}.$$

Aus $\partial y_x = p$ findet sich aber

16) $$\partial x_y = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad x = \int \frac{1}{p} \cdot dy = \frac{y}{p} + \int \frac{y}{p^2} \cdot dp,$$

d. h. wenn man hier aus (14.) den Werth von y setzt,

$$x = \frac{y}{p} + \int \frac{c \cdot (1 + p^2)^2}{2p^5} \cdot dp$$

oder

17) $$x = c \cdot \left( \frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + log\, p \right) + c_1.$$

Und eliminirt man aus (15. und 17.) den Veränderlichen p, so erhält man die Gleichung zwischen y und x mit den beiden willkührlichen Konstanten c und $c_1$.

Die Gleichung $\delta V = 0$ liefert zuletzt noch

18) $$\left[ \frac{3y \cdot \partial y_x^2 + y \cdot \partial y_x^4}{(1 + \partial y_x^2)^2} \right]_b \cdot \delta y_b - \left[ \frac{3y \cdot \partial y_x^2 + y \cdot \partial y_x^4}{(1 + \partial y_x^2)^2} \right]_a \cdot \delta y_a = 0,$$

welche zur Bestimmung der Konstanten benutzt werden muß.

Und wären die Grenzen des Integrals V selber veränderlich, nämlich $b_x$ und $a_x$, so kämen zu $\delta V$, also zu dem Aus-

drucke in (18.) zur Linken die Glieder

$$\left[\frac{y\cdot\partial y_x^{\,3}}{1+\partial y_x^{\,2}}\right]_b\cdot\delta b-\left[\frac{y\cdot\partial y_x^{\,3}}{1+\partial y_x^{\,2}}\right]_a\cdot\delta a$$

noch hinzu, wie in den frühern Aufgaben darüber noch das Nähere zu ersehen ist.

## Aufgabe 40.

Es sey $y_x$ so zu finden, daß

1) $$V=\int_{b\div a}y\cdot dx\times\int_{b\div a}x\cdot\partial y_x\cdot dx$$

unter allen

2) $$V_\varkappa=\int_{b\div a}y_\varkappa\cdot dx\times\int_{b\div a}x\cdot\partial(y_\varkappa)_x\cdot dx$$

ein Maximum oder Minimum werde.

Man hat hier

3) $$\delta V=\int_{b\div}y\cdot dx\cdot\int_{b\div a}x\cdot\partial\delta y\cdot dx+\int_{b\div a}x\cdot\partial y_x\cdot dx\cdot\int_{b\div a}\delta y\cdot dx,$$

d. h. wenn man nach (§. 477. N. V.) umformt,

4) $$\delta V=\int_{b\div a}\left(\int_{b\div a}x\cdot\partial y_x\cdot dx-\int_{b\div a}y\cdot dx\right)\delta y\cdot dx+[x\cdot\delta y]_{b\div a}\cdot\int_{b\div a}y\cdot dx.$$

Die Gleichung $\delta V=0$, giebt daher dasmal

I. $$\int_{b\div a}(x\cdot\partial y_x-y)\cdot dx=0,$$

und dann noch

II. $[x\cdot\delta y]_{b\div a}=0$, d. h. $b\cdot\delta y_b-a\cdot\delta y_a=0$.

Soll nun die Bedingung des Maximums oder Minimums nur an der bestimmten Grenze $x=b$ statt finden, so kann man den Gleichungen (I. und II.) durch jede beliebige Funktion y von x genügen, sobald man nur einige Konstanten mit hineinzieht, welche diesen Bedingungen gemäß bestimmt werden. Wäre aber z. B. y die zur Abscisse x gehörige Ordinate einer Kurve, in welcher V zwischen je zweien ihrer Punkte, also für jedes nach und nach immer anders und anders genommene b ein Maximum oder Minimum seyn soll, so müßte man, um dieser Bedingung zu genügen, den Ausdruck in (I.) unter dem Integralzeichen der Null gleich setzen, und man hätte dann

5) $$x \cdot \partial y_x - y = 0,$$

welche, integrirt,

6) $$y = c \cdot x$$

liefert.

Und da hier nur eine einzige Konstante zu bestimmen bleibt, so muß entweder $\delta y_b = \delta y_a = 0$, oder es muß zwischen $\delta y_b$ und $\delta y_a$ noch eine Gleichung gegeben seyn, wenn die Aufgabe überhaupt eine Auflösung zulassen soll.

## Aufgabe 41.

Sollte

1) $$V = \frac{\int_{b \div a} y \cdot dx}{\int_{b \div a} x \cdot \partial y_x \cdot dx}$$

ein Maximum oder Minimum werden, so hätte man

2) $$\delta V = \frac{\int_{b \div a} \delta y \cdot dx}{\int_{b \div a} x \cdot \partial y_x \cdot dx} - \frac{\int_{b \div a} y \cdot dx \cdot \int_{b \div a} x \cdot \partial \delta y \cdot dx}{(\int_{b \div a} x \partial y_x \cdot dx)^2}$$

oder

3) $$\delta V = \frac{\int_{b \div a} x \cdot \partial y_x \cdot dx + \int_{b \div a} y \cdot dx) \cdot \delta y \cdot dx}{(\int_{b \div a} x \cdot \partial y_x \cdot dx)^2}$$

$$- \frac{[x \cdot \delta y]_{b \div a} \cdot \int_{b \div a} y \cdot dx}{(\int_{b \div a} x \cdot \partial y_x \cdot dx)^2}.$$

Die Gleichung $\delta V = 0$ giebt daher jetzt unter der in der vorhergehenden Aufgabe zuletzt gemachten Voraussetzung,

I. $$x \cdot \partial y_x + y = 0 \quad \text{d. h.} \quad xy = c,$$

während zur Bestimmung der Konstante wiederum

II. $$b \cdot \delta y_b - a \cdot \delta y_a = 0$$

statt findet.

Es ist aber, wenn $y = y_x$ die Gleichung einer Kurve vorstellt, $\int_{b \div a} y \cdot dx$ der Inhalt AMBB$_1$A$_1$ (Fig. 7.) zwischen der

Axe der x, den zu $x = OA_1 = a$ und $x = OB_1 = b$ gehörigen Ordinaten $AA_1$ und $BB_1$ und dem zugehörigen Bogen AMB der Kurve selbst. Dagegen ist

$$\int_{b \div a} x \cdot \partial y_x \cdot dx = \int_{y_b \div y_a} x \cdot dy$$

der Inhalt $AMBB_2A_2$ zwischen der Axe der y, den beiden durch die Endpunkte desselben Bogens hindurchgehenden mit der Axe der x parallelen Geraden $AA_2$ und $BB_2$ und demselben Bogen AMB der Kurve. — Die gegenwärtige Aufgabe sucht also diejenige Kurve, für welche das geometrische Verhältniß dieser beiden Inhalte ein Maximum oder ein Minimum ist. Die Auflösung giebt, wie man sieht, die gleichseitige Hyperbel als Resultat. —

Gedruckt bei den Gebr. Unger.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

## Verzeichniß von Druckfehlern im fünften Theile.

S. 4. Z. 14. v. u. lies: $\int_y f_x \cdot dx$ statt $\int_y \partial_x \cdot dx$
— — — 12. — — — $\int f_x \cdot dx$ — $\int_y f_x \cdot dx$
— 8. — 13. — — — unter $f_z$ das verstanden, was aus $f_x$ wird,
u. s. w.
— — — 2. — — — $[\partial y_x]_a$ statt $[\partial y]_a$
— 9. — 5. — vb. — $(z—a)^b$ — $(z—a)$
— 12. — 1. — — — $\partial^n(uv)_x$ — $\partial^n(uv)^x$
— 19. — 10. — u. — $\int_{x \div x_1}$ — $\int_{x \div x}$
— 20. — 5. — — — x — z
— 21. — 6. — — — dz — dx
— — — 10. — — — dz — dx
— — — 11. — — — dz — dx
— 22. — 17. — vb. — $e^{xz''}$ — $e^{-xz''}$
— 23. — 8. — — — $\partial(\partial\psi_y)_x$ — $\partial(\partial\psi_y)$;
auch kann man im Beweise daselbst überall z, z′, z″, dz beziehlich statt y, y′, y″, dy setzen.
— — — 10. — u. — y′ und y″ statt y′
— — — — — — — x′ und x″ — x′
— 25. — 12. — — muß das Zeichen *f*, welches am weitesten zur Rechten steht, weggemacht werden;
— 29. — 3. u. 9. v. o. lies: $(n+a)^{n|-1}$ statt $(n+a)^{a|-1}$
— 44. — 2. v. vb. ist die halbe Klammer wegzumachen.
— 55. — 9. v. — lies: $\partial^n(a_0)_x$ statt $\partial^n(a_0)$
— 234. — 8. — u. — $\partial(\delta^2 z)_y$ — $\partial^2(\delta z)_y$
— 243. — 15. — — — $\partial z_x$ — $\partial z$
— 249. — 12. — — — $\partial z_x$ — $\partial z$
— 256. — 17. — vb. — 1sten Beispiel der Nr. I.

S. 274. Z. 6. v. ob. lies: $\partial V_b$ statt $\partial V$

— 282. — 1. — — — $\partial f_\omega$ — $\partial f$

— 283. — 12. — — — $\partial b_a$ — $\partial b$

— 284. — 2. — u. — $\partial^3 z_y$ — $\partial^3 z$

— 285. — 14. — ob. — $z$ — $y$

— 286. muß unten zur zweiten Note noch folgendes hinzugefügt werden:

„Aus dieser Deduktion folgert sogleich, wie man der Gleichung $F = 0$ allemal eine solche Form geben kann, daß sie den singulären Werth liefert, im Falle ein solcher existirt, sobald aus ihr und aus den beiden Gleichungen $\partial F_{z_1} = 0$ und $\partial F_{{}_1 z} = 0$ sowohl $z_1$ als auch ${}_1 z$ eliminirt werden. Die Form der $F = 0$ darf aber namentlich dann nicht so seyn, daß $z_1$ oder ${}_1 z$ in ihr isolirt stehen."

S. 287. Z. 5. v. ob. lies: $\partial F_{(y)} = 0$ statt $\partial F_y$

— — — 13. — — — $\partial z_y$ — $\partial z^x$

— — — 11. — u. — $x \cdot \partial z_x$ — $\cdot \partial z_x$

— — — 2. — — — $x^2 \cdot \psi$ — $x^3 \cdot \psi$

— 288. — 1. — ob. — $2y^2$ — $2y$

— — — 5. — u. — $\omega^2$ — $y\omega^2$

— — — 6. — — — $\frac{\omega}{y}$ — $\omega$

— — — 10. — u. — $\partial \psi_y$ — $\partial \psi$

— 299. — 13. — ob. — $\psi = \omega$ — $\psi = 0$

— 307. muß unten folgende Note hinzugefügt werden:

„Man erhält auch den singulären Werth, im Falle ein solcher existirt, indem man aus $F = 0$, $\partial F_{u_1} = 0$, $\partial F_{{}_1 u} = 0$ und $\partial F_{u'} = 0$ die 3 Ableitungen $u_1$, ${}_1 u$ und $u'$ eliminirt, sobald nur $F = 0$ die dazu schickliche Form hat, so nämlich daß $u_1$, ${}_1 u$ oder $u'$ nicht in $F$ ganz isolirt erscheinen. Dies folgt unmittelbar aus obiger (I.)."

S. 314. Z. 9. v. ob. lies: $\partial(\int_{x \div \alpha} M \cdot dx)_y$ statt $\partial(\int_{x \div \alpha} M \cdot dx)$

— — — 11. — — — $[M_x]_\alpha$ — $[M]_\alpha$

— 317. — 11. — — — $\partial^{1,1} M_{y,z}$ — $\partial^{1,1} M_{x,z}$

— — — 9. — u. — §§. 297. — §§. 207.

— 318. — 1. — — — $\partial^{1,1} u_{x,y}$ — $\partial^{1,} u_{x,y}$

— 319. — 2. — — — $\int_{x \div \alpha} P \cdot dx$ — $\int_{\div \alpha} P \cdot dx$

— 333. — 7. — — — $\psi_\omega$ — $\psi_{\omega'}$

— 343. — 14. — — — $\partial \omega_y + \partial \omega_z \cdot \partial z_y$ — $\partial \omega_{(y)} + \partial \omega_z \cdot \partial z_y$

S. 346. Z. 13. v. ob. lies: $\psi_{\omega}$ statt $\psi_{\omega'}$

— 359. — 17. — — — $\psi_{\omega}$ — $\psi$

— — — 20. — — — $\psi^{(2)}_{\omega'}, \psi^{(1)}_{\omega'}$ — $\psi^{(2)}_{\omega}, \psi^{(1)}_{\omega}$

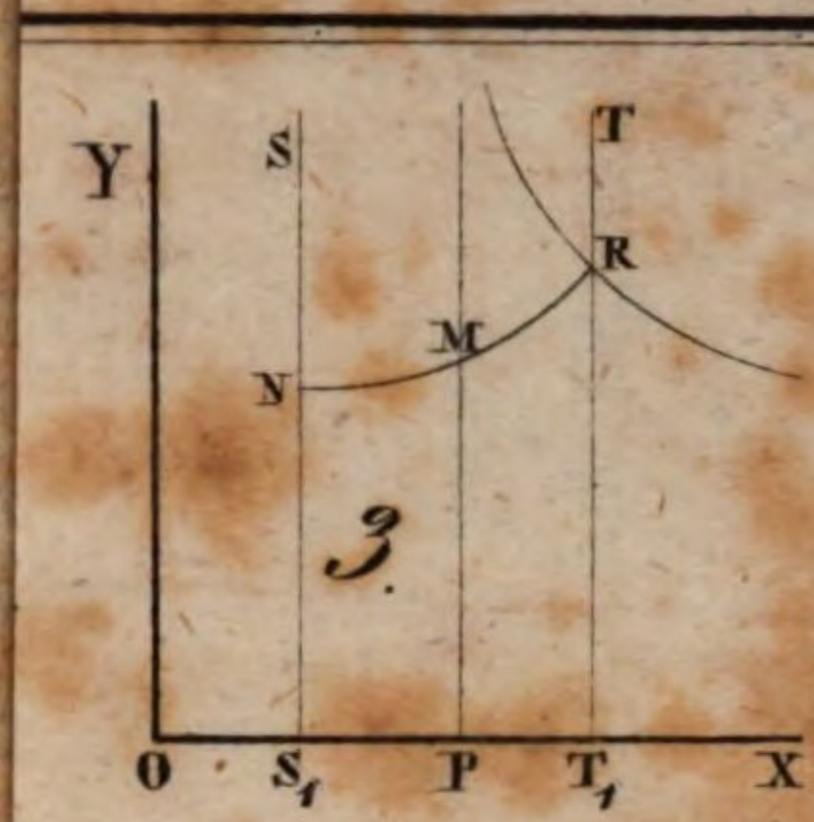
— 360. — 2. — — — $\psi^{(1)}_{\omega,\omega'}$ — $\omega'' \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega'}$

— — — 3. — — — $\psi^{(1)}_{\omega,\omega''}$ — $\psi^{(1)}_{\omega,\omega'}$

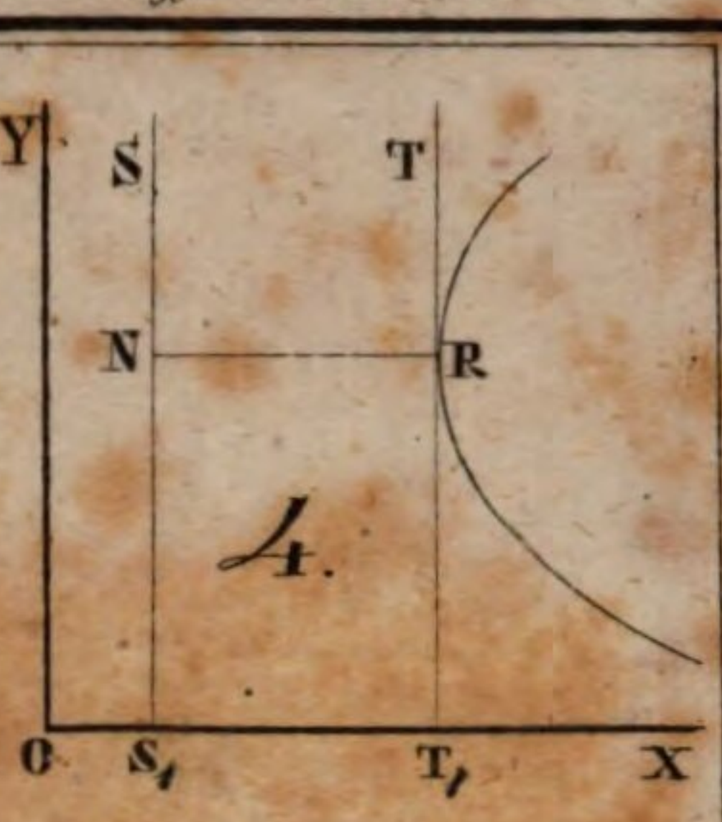
— 365. — 11. — — — $\omega'^2 \cdot \psi^{(3)}_{\omega}$ — $\omega'^3 \cdot \psi^{(3)}_{\omega}$

— — — 6. — u. — $\omega'' \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega'''}$ — $\omega''' \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega'''}$

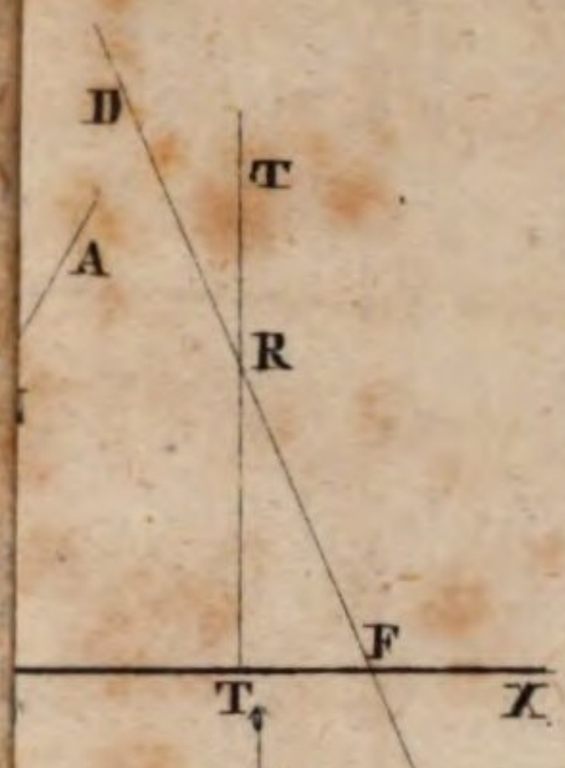
BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

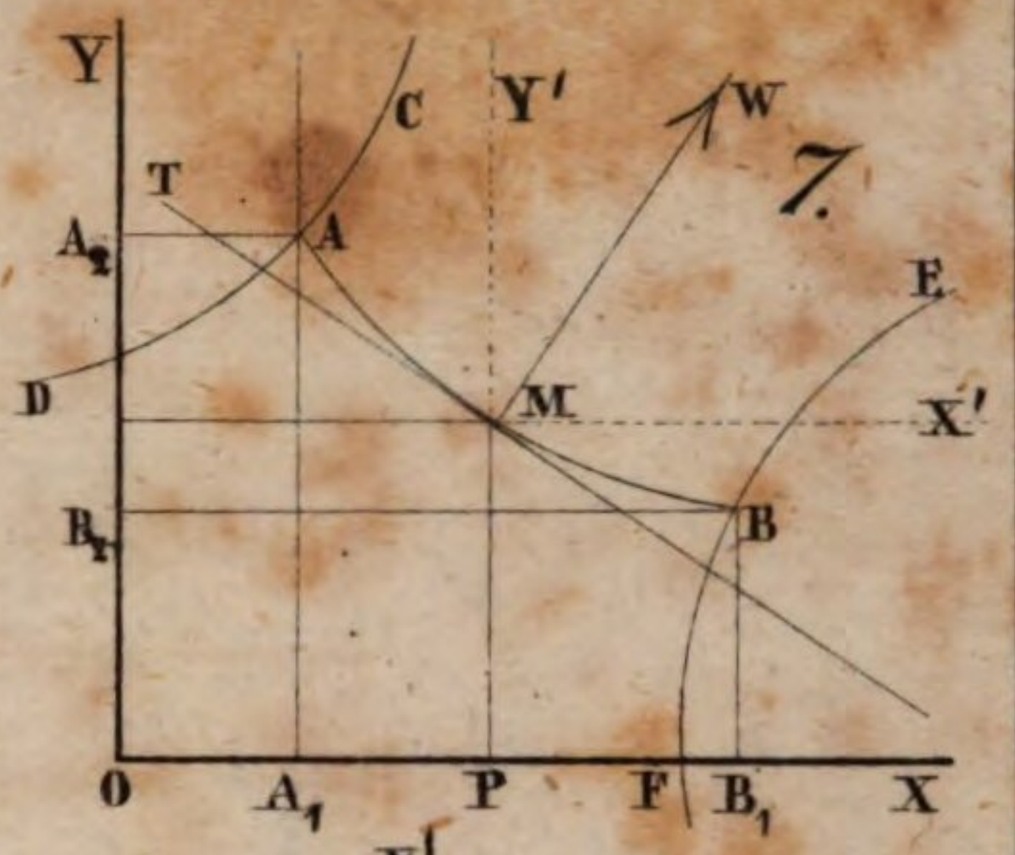



3.



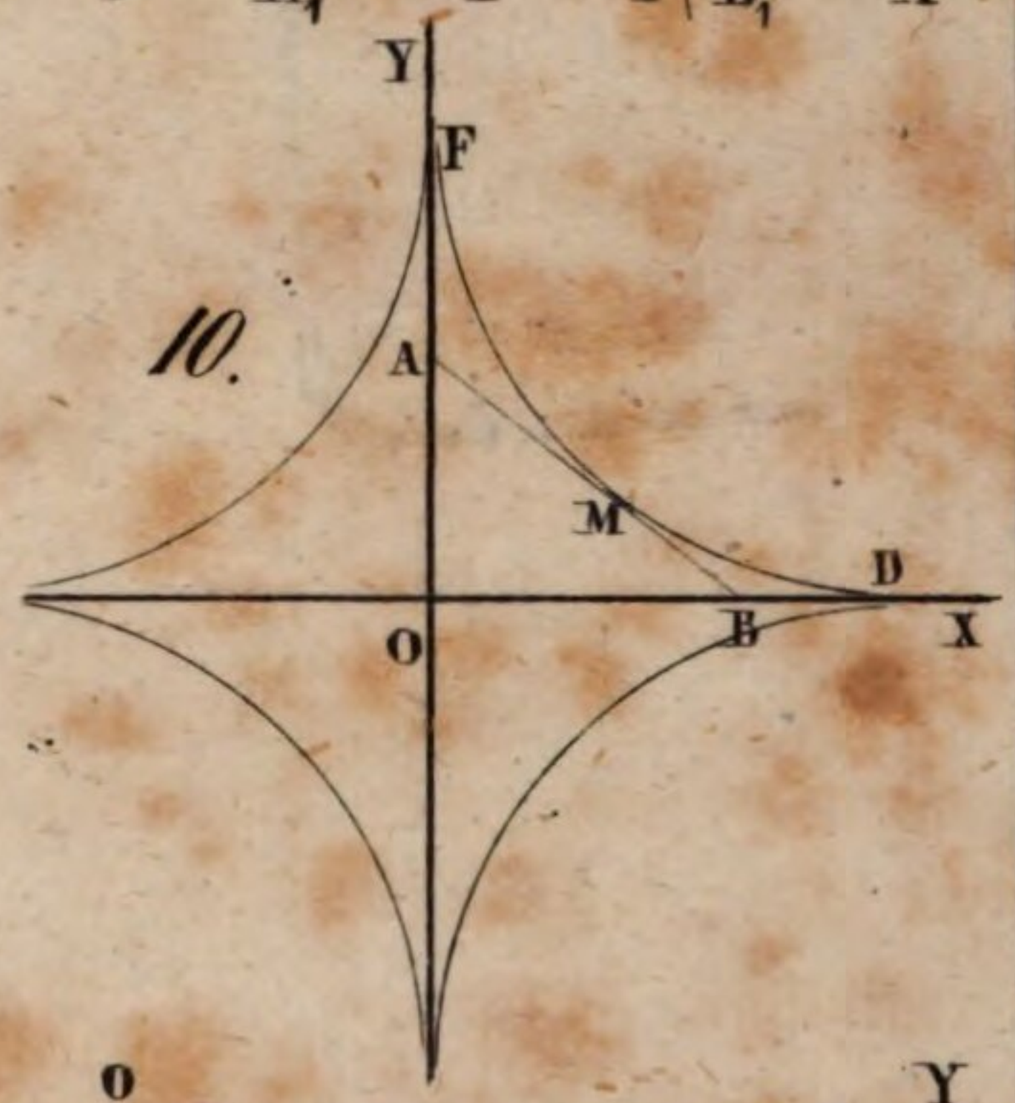

4.

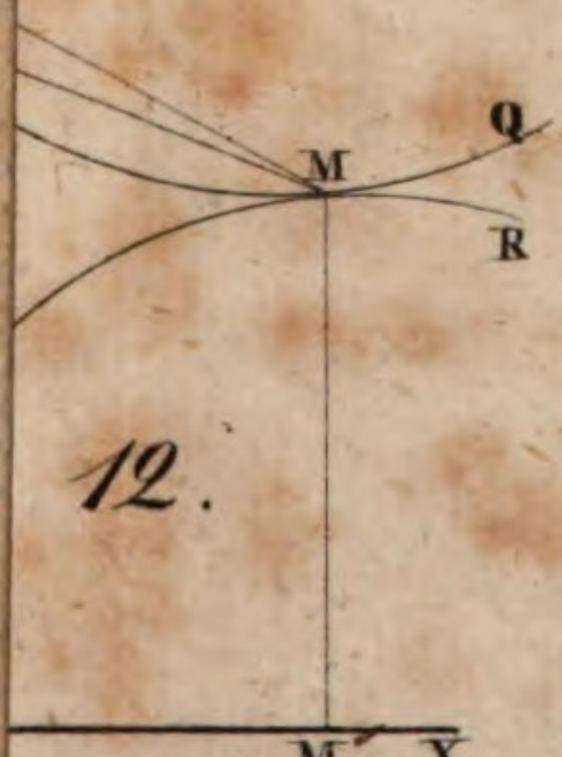


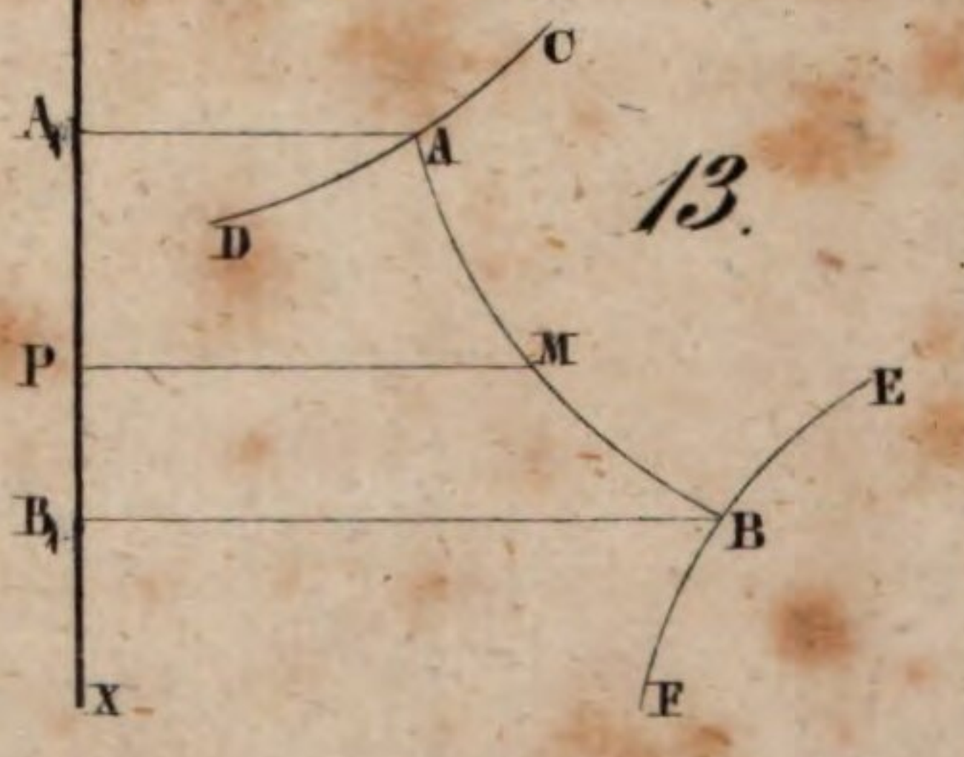

7.

10.




12.




13.

lith. v. I. Veit in Berlin

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik

Bd.: 7

Berlin 1833

Math.u. 144 k-7
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594170-8